Corrigé

Devoir Surveillé $N°$ 1

u

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

$\mathscr{L}(E)$

PSI

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
✍ On dit que u est une homothétie s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$
✍ On dit que A est une matrice scalaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Questions de cours

Cours

Exercice 1

1. L'application tr est une forme linéaire ($\operatorname{tr}(A+\lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$) non nulle ($\operatorname{tr}(I_n) = n \neq 0$) sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Donc $\ker \operatorname{tr}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Mais on a $\ker \operatorname{tr} = H$, on en déduit que H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ l'application définie par : $\varphi(P) = P(1)$.
   - 2.1 Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\varphi(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$, donc φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}[X]$ (car $\varphi(X) = 1 \neq 0$).
   - 2.2 φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}[X]$, donc $\ker\varphi$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$. Puisque $X \notin \ker\varphi$, on a donc $\mathbb{K}[X] = \ker\varphi \oplus \operatorname{Vect}(X)$.

PROBLÈME

Le but du problème est de démontrer que toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ *non scalaire* est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}$

Une question préliminaire :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie , u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$.

$\boxed{1.}$ Si u est une homothétie, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_E$, et donc $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda I_n$.
Réciproquement, si A est une matrice scalaire, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$ c'est-à-dire $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda \mathrm{Id}_E)$, d'où $u = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Première partie :
Un exemple

Dans cette partie A désigne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A. Enfin $B = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de E.

$\boxed{2.}$ $\det A = 2 \neq 0$ donc A inversible.

$\boxed{3.}$ $u(e_1) = (1,1)$ et $u(e_2) = (-1,1)$.
Dans la suite de cette partie $v_1 = e_1$ et $v_2 = u(e_1)$.

$\boxed{4.}$ $v_1 = e_1 = (1,0)$ et $v_2 = u(e_1) = (1,1)$.

$\boxed{5.}$ On a $\det_B(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, donc la famille (v_1, v_2) est une base de E.

$\boxed{6.}$ On a $u(v_2) = u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = (0,2)$ donc
$u(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 \Leftrightarrow (0,2) = (\alpha + \beta, \beta) \Leftrightarrow \alpha = -2$ et $\beta = 2$.

$\boxed{7.}$ On a $u(v_1) = v_2 = 0v_1 + v_2$ et $u(v_2) = -2v_1 + 2v_2$, donc $\mathcal{M}_{(v_1,v_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{8.}$ Comme A et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ représentent les matrices de l'endomorphisme u dans deux bases, la matrice A est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$, notons que $\det A = 2$ et $\mathrm{tr}\, A = 2$.

Deuxième partie :
Une caractérisation des homothéties

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \text{la famille } (x, u(x)) \text{ est liée.}$$

$\boxed{9.}$ La famille $(x, u(x))$ est liée, il existe alors deux scalaire $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x + \lambda_2 u(x) = 0$, le scalaire $\lambda_2 \neq 0$ (car si $\lambda_2 = 0$ alors $\lambda_1 x = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$). Il vient alors que $u(x) = \lambda_x x$ où $\lambda_x = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Si $\lambda'_x \in \mathbb{K}$ est tel que $u(x) = \lambda'_x x$, alors $\lambda_x x = \lambda'_x x$, et donc $\lambda_x = \lambda'_x$.

$\boxed{10.}$ Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.

$\boxed{10.1}$ Si (x, y) est liée, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$ $(x \neq 0)$, comme $\lambda_y y = u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$ et $y \neq 0$, on a donc $\lambda_x = \lambda_y$.

$\boxed{10.2}$ D'une part $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$. D'autre part $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Donc $\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y$ ou encore $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$, par la liberté, il vient que $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, et donc $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

11. D'après ce qui précède, le scalaire λ_x ne dépend pas du vecteur non nul x. Si on pose $\lambda = \lambda_x$, alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$, et cette égalité est valable aussi pour $x = 0$. D'où pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$. On en déduit que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$.

Troisième partie : Démonstration du résultat

Dans cette partie $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice *non scalaire*. On désigne par u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

12. Puisque u n'est pas une homothétie, d'après le résultat de la partie précédente, il existe $e \in E$ tel que $(e, u(e))$ soit libre, donc base de E.
On pose $v_1 = e$ et $v_2 = u(e)$. $\mathscr{B}$ désigne la base (v_1, v_2).

13. La famille $(v_1, v_2) = (e, u(e))$ est une base de E, et ceci justifie l'existence de deux nombres $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $u(v_2) = av_1 + bv_2$.

14. On a $u(v_1) = u(e) = v_2 = 0v_1 + v_2$ et $u(v_2) = av_1 + bv_2$. Donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

15. A et B sont les matrices de l'endomorphisme u dans deux bases, donc A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

16. Les deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont même trace et même déterminant. Mais $\det B = -a$ et $\operatorname{tr} B = b$. Donc $b = \operatorname{tr}(A)$ et $a = -\det A$.