# Devoir Surveillé $N°$ 2

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathcal{L}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PSI

## Questions de cours

1. Rappeler la définition d'une valeur propre pour un endomoerphisme $u$.
2. Rappeler la définition d'un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda$ pour endomorphisme $u$.
3. Rappeler la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u$.
4. Rappelr la définition du sous espace propre d'un endomorphisme $u$ associé à une valeur propre $\lambda$.
5. Si $P$ est un polynôme annulateur d'un endomorphisme $u$, donner un lien entre le spectre de $u$ et les racines de $P$.

**Exercice 1** Soit $A$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer $\mathrm{sp}(A)$.
3. Déterminer les sous espaces propres de $A$.
4. Montrer que $A$ est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Montrer que $Q(A)$ est semblable à $Q(D)$, en déduire que $\mathrm{sp}(Q(A)) = \{Q(2), Q(0)\}$.

**Exercice 2** Soit $A$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique, le spectre et les sous espaces propres de $A$.

# PROBLÈME

### Première partie : Une version simple du théorème des noyaux

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 et $u$ un endomoephisme de $E$.
On suppose dans cette partie que le polynôme caractéristique de $u$ s'écrit sous forme

$$\chi_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^2$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ($\lambda_1$ racine simple de $\chi_u$ et $\lambda_2$ racine double de $\chi_u$).

1. Quel est le spectre de $u$.
   On note $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$ les sous espaces propres de $u$ associés respectivement à $\lambda_1$ et $\lambda_2$ et on pose $w = u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E$ et $v = (u - \lambda_2 \mathrm{Id}_E)^2$.
2. Exprimer $v$ en fonction de $u^2$, $u$ et $\mathrm{Id}_E$.
3. Soit $x \in \ker w$. Exprimer $v(x)$ en fonction de $x$.
4. En déduire que $\ker v \cap \ker w = \{0\}$.
5. Justifier que $vw = wv = 0$.
6. Soit $x \in E$. Montrer que $v(x) \in \ker w$ et $w(x) \in \ker v$.
7. Soit $Q$ le polynôme $Q = -X + 2\lambda_2 - \lambda_1$.
   - 7.1 Montrer que $(X-\lambda_2)^2 + (X-\lambda_1)Q = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.
   - 7.2 En déduire que $\mathrm{Id}_E = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} v + \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} wQ(u)$.
   - 7.3 Montrer que $E = \ker v \oplus \ker w$.
8. Montrer que $E_{\lambda_2} \subseteq \ker v$.
9. Montrer que si $E_{\lambda_2} = \ker v$, alors $u$ est diagonalisable.

## Deuxième partie :
## Un exemple

Dans cette partie $u$ désigne l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. Montrer que $\chi_u = (X-1)^2(X-2)$.
11. Déterminer les sous espaces propres de $u$.
12. 
    - 12.1 Calculer la matrice $(A - I_3)^2$.
    - 12.2 En déduire une base et la dimension de $\ker\left((u-\mathrm{Id}_E)^2\right)$
13. On pose $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$ et $\varepsilon_1 = (u - \mathrm{Id}_E)(\varepsilon_2)$.
    - 13.1 Déterminer $\varepsilon_1$, puis vérifier que $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$.
    - 13.2 Justifier que $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.
    - 13.3 Trouver un vecteur propre $\varepsilon_3$ de $u$ associé à la valeur propre 2 et dont la deuxième composante est égale à 1.
    - 13.4 Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $E$, puis déterminer la matrice de $u$ dans cette base.

حظ سعيد للجميع

**Bonne chance**

**END**