Devoir Surveillé $N°$ 2

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

u $\mathscr{L}(E)$ PSI

Questions de cours

1. Rappeler la défintion d'un hyperplan.
2. Rappeler la définition d'un sous espace stable par un endomorphisme u.
3. Rappeler la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme u.
4. Rappeler la défintion d'un vecteur propre associé à une valeur propre λ.

Exercice 1
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Déterminer les sous espaces propres de A.

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si 0 est une valeur propre de uv alors c'est aussi une valeur propre de vu.
2. Soit λ une valeur propre non nulle de uv et x un vecteur propre de uv associé à λ.
   - 2.1 Montrer que $v(x) \neq 0$.
   - 2.2 En déduire que λ est une valeur propre de vu.
3. En déduire que $\mathrm{Sp}(uv) = \mathrm{Sp}(vu)$.

Exercice 3
Soit $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ X \text{ divise } P\}$.
Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

PROBLÈME

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Première partie :
Le spectre de u

$\boxed{1.}$ Justifier que $u \neq 0$ et $u^3 + u = 0$.

$\boxed{2.}$ Montrer que A n'est pas inversible.

$\boxed{3.}$ Donner un polynôme annulateur de u.

$\boxed{4.}$ Montrer que 0 est la seule valeur propre de A.

Deuxième partie :
Réduction de A

Pour la suite du problème F désigne le sous espace vectoriel $F := \ker(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.

$\boxed{5.}$ Montrer que le sous espace vectoriel F est non nul.

$\boxed{6.}$ Montrer que $\dim F \leq 2$. Quelles sont alors les valeurs possibles de $\dim F$?

$\boxed{7.}$ Montrer que F est stable par u.

$\boxed{8.}$ Montrer que $\dim F = 2$. (Indication : par l'absurde....)

$\boxed{9.}$ Montrer que $\ker u \oplus F = E$.

$\boxed{10.}$ Soit v l'endomorphisme induit par u sur F et e un vecteur non nul de F.

$\boxed{10.1}$ Justifier que $u(e) \in F$.

$\boxed{10.2}$ Montrer que $\mathscr{B}_F = (e, v(e))$ est une base de F.

$\boxed{10.3}$ Déterminer A' la matrice de v dans la base $\mathscr{B}_F$.

$\boxed{11.}$ Montrer que A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$