Corrigé

Devoir Surveillé $N°$ 2

u Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. $\mathscr{L}(E)$

PSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

Soit A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

1.

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(XI_3-A)=\begin{vmatrix}X&-1&-1\\-1&X&-1\\-1&-1&X\end{vmatrix}=_{L_1\leftarrow L_1-L_2}\begin{vmatrix}X+1&-X-1&0\\-1&X&-1\\-1&-1&X\end{vmatrix}=_{C_2\leftarrow C_2+C_1}\begin{vmatrix}X+1&0&0\\-1&X-1&-1\\-1&-2&X\end{vmatrix}\\ &= (X+1)(X(X-1)-2)=(X+1)(X+1)(X-2)=(X+1)^2(X-2)\end{aligned}$$

2. Les valeurs propres de A sont : -1 et 2.

3. Les sous espaces propres de A :

Le sous espace propre $E_{-1}(A)$:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}(A)\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow x+y+z=0\Leftrightarrow x=-y-z$. Donc

$$E_{-1}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Le sous espace propre $E_2(A)$:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2(A)\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+z&=&0\\x-2y+z&=&0\\x+y-2z&=&0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$. Donc

$$E_2(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E.

$\boxed{1.}$ Si 0 est une valeur propre de uv alors $\det(uv) = 0$, par suite $\det(vu - 0.\mathrm{Id}_E) = \det(vu) = 0$, ainsi 0 est une valeur propre de vu .

$\boxed{2.}$ Soit λ une valeur propre non nulle de uv et x un vecteur propre de uv associé à λ.

$\boxed{2.1}$ On a $u(v(x)) = \lambda x$. Si $v(x) = 0$ alors $\lambda x = 0$, or $x \neq 0$, on obtient $\lambda = 0$, ce qui contredit le fait que λ est non nulle. D'où $v(x) \neq 0$.

$\boxed{2.2}$ On a $u(v(x)) = \lambda x$, donc $v(u(v(x))) = \lambda v(x)$, en d'autres termes $(vu)(v(x)) = \lambda v(x)$, or $v(x) \neq 0$, il vient que λ est une valeur propre de vu.

$\boxed{3.}$ Soit λ une valeur propre de uv. Si $\lambda = 0$, d'après le résultat de la question 1, λ est une valeur propre de vu. Si λ est non nulle, d'après le résultat de la question précédente, λ est une valeur propre de uv. On en déduit alors que $\mathrm{Sp}(uv) \subseteq \mathrm{Sp}(vu)$. Avec un même raisonnement, on a $\mathrm{Sp}(vu) \subseteq \mathrm{Sp}(uv)$. D'où le résultat.

Exercice 3

Remarquons d'abord que X divise P si, et seulement si, $P(0) = 0$. Donc

$$F = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(0) = 0\}$$

Soit maintenant $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ l'application définie par $f(P) = P(0)$. Clairement, f est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}[X]$ ($f(1) = 1 \neq 0$). Donc $F = \ker f$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

PROBLÈME

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Première partie :
Le spectre de u

$\boxed{1.}$ Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u) = A \neq 0$, donc $u \neq 0$. Aussi $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u^3 + u) = A^3 + A = 0$, donc $u^3 + u = 0$.

$\boxed{2.}$ On a $A^3 = -A$, donc $\det(A^3) = \det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$, par suite $(\det(A))^3 + \det A = 0$, ou encore $\det(A)\left((\det A)^2 + 1\right) = 0$. Or $(\det A)^2 + 1 \neq 0$, il vient alors que $\det A = 0$, donc A est non inversible.

$\boxed{3.}$ On a $u^3 + u = 0$, donc $X^3 + X$ est un polynôme annulateur de u.

$\boxed{4.}$ Puisque A est non inversible, 0 est une valeur propre de A.
Réciproquement, si λ est une valeur propre de A (donc de u), alors λ est une racine de $X^3 + X$, donc $\lambda = 0$ (car 0 est la seule racine réelle de $X^3 + X$).

Deuxième partie :
Réduction de A

Pour la suite du problème F désigne le sous espace vectoriel $F := \ker(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.

$\boxed{5.}$ Par l'absurde supposons que $F = 0$, donc $u^2 + \mathrm{Id}_E$ est un isomorphisme, or $u(u^2 + \mathrm{Id}_E) = 0$, il vient que $u = 0$, ce qui contredit le fait que $u \neq 0$.

6. On a $\ker u \neq \{0\}$ car 0 est une valeur propre de u. Soit x un vecteur non nul du $\ker u$, on a $(u^2+\mathrm{Id}_E)(x) = u^2(x)+x = x \neq 0$, par suite $x \not\in\in F$, d'où $F \subsetneq E$, ainsi $\dim F < \dim E = 3$, il vient donc que $\dim F \leq 2$.
F non nulle implique $\dim F > 0$, d'après ce qui précède, les valeurs possible de $\dim F$ sont 1 et 2.

7. Les deux endomorphsmes u et $u^2+\mathrm{Id}_E$ commutent, donc $F = \ker(u^2+\mathrm{Id}_E)$ est stable par u.

8. On suppose par l'absurde que $\dim F \neq 2$, dans ce cas $\dim F = 1$ c'est-à-dire que F est une droite vectorielle. Soit z un vecteur non nul de F, on a donc $F = \mathrm{Vect}(z)$. De la stabilité de F par u, il vient que $u(z) \in \mathrm{Vect}(z)$. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(z) = \alpha z$, en particulier $u^2(z) = \alpha u(z) = \alpha^2 z$, d'autre part $u^2(z) = -z$ car $z \in F$. On a donc $-z = \alpha^2 z$, ou encore $(\alpha^2+1)z = 0$. Ce qui n'est pas le cas car $z \neq 0$ et $\alpha^2+1 \neq 0$.

9. Soit $x \in \ker u \cap F$, donc $u(x) = 0$ et $u^2(x)+x = 0$, par suite $x = 0$.
$\ker u$ est non nul car u n'est pas bijective (0 valeur propre de u), donc $\dim\ker u \geq 1$. Par suite $3 \geq \dim(\ker u \oplus F) = \dim\ker u + \dim F \geq 1+2 = 3$, ainsi $\dim\ker u + \dim F = 3$. On en déduit alors que $\ker u \oplus F = E$.

10. Soit v l'endomorphisme induit par u sur F et e un vecteur non nul de F.

10.1 F sable par u et $e \in F$, donc $u(e) \in F$.

10.2 $\dim F = 2$, il suffit alors de montrer que cette famille est libre. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e + \beta u(e) = 0$ $(\star)$. On applique u à cette égalité, on obtient $\alpha u(e) + \beta u^2(e) = 0$, donc $\alpha u(e) - \beta e = 0$ $(\star\star)$. On combinant les deux équations précédentes de la façon suivantes $\alpha(\star) - \beta(\star\star)$, on obtient $(\alpha^2+\beta^2)e = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$ (car $e \neq 0$).

10.3 On a $v(e) = 0e + 1v(e)$ et $v(v(e)) = u^2(e) = -e + 0v(e)$, donc

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Soit e_1 un vecteur non nul du $\ker u$ (il forme alors une base du $\ker u$). Alors la famille $(e_1, e, v(e))$ est une base de E (plus précisément, c'est une base adaptée à la somme $\ker u \oplus F = E$). La matrice de u dans cette base est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de bases la matrice A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$