Corrigé

Devoir Surveillé N° 2

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathcal{L}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\chi_A = = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = X(X-2)$. Le polynôme caractéristique de A est scindé a racines simples donc diagonalisable.

2. $\mathrm{sp}(A) = \{0, 2\}$.

3. Les sous espaces propres de A :

   On a $E_0(A) = \ker A$ donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow x + y = 0$, par suite $E_0(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   On a $E_2(A) = \ker(A - 2I_2)$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow x + y = 2x$ et $x + y = 2y \Leftrightarrow x = y$. Donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

4. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Notons $\varepsilon_1 = (1,1)$ et $\varepsilon_2 = (-1,1)$. La famille $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc elle est libre, et en particulier base de $\mathbb{R}^2$. Comme D représente la matrice de u dans la base ε, il vient alors que les deux matrices A et D sont semblables.

5. Soit $P \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. remarquons d'abord que $A^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}.PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$. Si $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $Q(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k PD^kP^{-1} = P(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k)P^{-1} = PQ(D)P^{-1}$, ainsi les deux matrice $Q(A)$ et $Q(D)$ sont semblables. Mais $Q(D) = \begin{pmatrix} P(2) & 0 \\ 0 & Q(0) \end{pmatrix}$, il vient alors que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(D) = \{Q(2, Q(0))\}$.

Exercice 2 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice A étant diagonale, donc $\chi_A = X(X-1)(X-2)$, ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$.

Les sous espaces propres :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ 3z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -y \text{ et } z = 0$. Donc

$$\boxed{E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & x \\ 3z & = & y \\ 2z & = & z \end{array} \right. \Leftrightarrow y = z = 0$. Donc

$$\boxed{E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 2x \\ 3z & = & 2y \\ 2z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y+2z = \frac{7}{3}z \\ y & = & \frac{2}{3}z \end{array} \right.$. Donc

$$\boxed{E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

PROBLÈME

Première partie : Une version simple du théorème des noyaux

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 et u un endomoephisme de E.
On suppose dans cette partie que le polynôme caractéristique de u s'écrit sous forme

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (λ_1 racine simple de χ_u et λ_2 racine double de χ_u).

1. $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
   On note E_{λ_1} et E_{λ_2} les sous espaces propres de u associés respectivement à λ_1 et λ_2 et on pose $w = u - \lambda_1 \text{Id}_E$ et $v = (u - \lambda_2 \text{Id}_E)^2$.
2. $v = (u - \lambda_2 \text{Id}_E)^2 = u^2 - 2\lambda_2 u + \lambda_2^2 \text{Id}_E$.
3. Soit $x \in \ker w = \ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E)$. Alors $u(x) = \lambda_1 x$. On a donc $v(x) = u^2(x) - 2\lambda_2 u(x) + \lambda_2^2 \text{Id}_E(x) = \lambda_1^2 x - 2\lambda_1\lambda_2 x + \lambda_2^2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 x$.
4. Soit $x \in \ker v \cap \ker w$. Donc $x \in \ker w$ et dans ce cas $0 = v(x) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 x$, ainsi $x = 0$. D'où le résultat.
5. v et w commutent car ils sont des polynômes en u. D'autre part $wv = (u - \lambda_1 \text{Id}_E)(u - \lambda_2 \text{Id}_E)^2 = \chi_u(u) = 0$ (par le théorème de Cayley-Hamilton).

6. Soit $x \in E$.
On a $v(w(x)) = (vw)(x) = 0$, donc $w(x) \in \ker v$.
de même, on a $w(v(x)) = (wv)(x) = 0$, donc $v(x) \in \ker w$.

7. Soit Q le polynôme $Q = -X + 2\lambda_2 - \lambda_1$.

7.1 Montrer que $(X-\lambda_2)^2 + (X-\lambda_1)Q = (\lambda_1-\lambda_2)^2$.

$$\begin{aligned}(X-\lambda_2)^2 + (X-\lambda_1)Q &= X^2 - 2\lambda_2 X + \lambda_2^2 + -X^2 + 2\lambda_2 X - \lambda_1 X + \lambda_1 X - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\\ &= \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2\\ &= (\lambda_2-\lambda_1)^2\end{aligned}$$

7.2 On applique les polynômes précédentes à l'edomorphismes u , on obtient $(u-\lambda_2\,\mathrm{Id}_E)^2 + (u-\lambda_1\,\mathrm{Id}_E)Q(u) = (\lambda_1-\lambda_2)^2\,\mathrm{Id}_E$ ou encore $v + wQ(u) = (\lambda_1-\lambda_2)^2\,\mathrm{Id}_E$. Puisque $(\lambda_1-\lambda_2) \neq 0$, on a donc $\mathrm{Id}_E = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}v + \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}wQ(u)$.

7.3 Soit $x \in E$. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$x = \underset{E}{\mathrm{Id}}(x) = \underbrace{\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}v(x)}_{x_1} + \underbrace{\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}w(Q(u)(x))}_{x_2}$$

Par le résultat de la question 6. on a $x_1 \in \ker w$ et $x_2 \in \ker v$. Il en résulte que $E = \ker v + \ker w$. Puisque la somme $\ker v + \ker w$ est directe, on a alors $E = \ker v \oplus \ker w$.

8. Soit $x \in E_{\lambda_2}$ alors $(u-\lambda_2\,\mathrm{Id}_E)(x) = 0$, d'où $v(x) = (u-\lambda_2\,\mathrm{Id}_E)\left((u-\lambda_2\,\mathrm{Id}_E)(x)\right) = 0$, par suite $x \in \ker v$.

9. Puisque λ_1 est une valeur propre simple, $\dim\ker w = \dim E_{\lambda_1} = 1$, donc $\dim\ker v = 3 - \dim\ker w = 2$. Si $E_{\lambda_2} = \ker v$, alors dans ce cas $\dim E_{\lambda_2} = \dim\ker v = 2$. Soit ε_1 un vecteur non nul de E_{λ_1} (la famille formée par le vecteur ε_1 est une base de E_{λ_1}) et $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de E_{λ_2}. Alors la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u, ainsi u est diagonalisable.

Deuxième partie :
Un exemple

Dans cette partie u désigne l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

10.

$$\begin{aligned}\chi_u &= \begin{vmatrix} X & -1 & -1\\ -1 & X-2 & 1\\ 1 & -1 & X-2\end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1\\ 0 & X-2 & 1\\ X-1 & -1 & X-2\end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1\\ 0 & X-2 & 1\\ 0 & 0 & X-1\end{vmatrix}\\ &= (X-2)(X-1)^2\end{aligned}$$

11. Les sous espaces propres de u : Les valeurs propres de u sont 1 et 2.
$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z &= x\\ x+2y-z &= y\\ -x+y+2z &= z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z &= 0\\ x+y-z &= 0\\ -x+y+z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow x = z$ et $y = 0$. Donc

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y+z & = & 2x \\ x+2y-z & = & 2y \\ -x+y+2z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x+y+z & = & 0 \\ x-z & = & 0 \\ -x+y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=y=z$. Donc

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$\boxed{11.1}$ $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{11.2}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker((A-I_3)^2) \Leftrightarrow x+y-z=0 \Leftrightarrow x=-y+z$. Donc $\ker((A-I_3)^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et par suite $\ker((u-\mathrm{Id}_E)^2) = \mathrm{Vect}\,((-1,1,0),(1,0,1))$.
Puisque la famille $((-1,1,0),(1,0,1))$ est libre, il vient que $\dim \ker\left((u-\mathrm{Id}_E)^2\right) = 2$

$\boxed{12.}$ On pose $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$ et $\varepsilon_1 = (u-\mathrm{Id}_E)(\varepsilon_2)$.

$\boxed{12.1}$ On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\varepsilon_1 = (-2,0,-2)$.

On a aussi $A\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$.

$\boxed{12.2}$ On a $\varepsilon_1 = (u-\mathrm{Id}_E)(\varepsilon_2) = u(\varepsilon_2) - \varepsilon_2$, donc $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

$\boxed{12.3}$ $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{12.4}$ Le déterminant de $\mathscr{B}'$ dans la base canonique : $\det_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B}') = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$, donc

$$\boxed{\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

END