Devoir Surveillé N° 3

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$\mathcal{L}(E)$

PSI

Questions de cours

1. Rappeler la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable.
3. Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.
4. Rappeler la définition d'ordre de multiplicité d'une valeur propre.
5. Donner une condition suffisante sur le polynôme caractéristique d'un endomorphisme pour qu'il soit diagonalisable.

Exercice 1

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   - 1.1 Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 P(t) e^{-t}$.
   - 1.2 En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge.

   Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.
2. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\langle X^k, 1\rangle = k\langle X^{k-1}, 1\rangle$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, que $\langle X^n, 1\rangle = n!$.
4. Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $\langle X^m, X^n\rangle = (n+m)!$.
5. Que vaut $\|X^n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 2 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det M$.
2. Montrer que si $(\mathrm{tr}(M))^2 > 4\det M$ alors M est diagonalisable .
3. On suppose dans cette question que $(\mathrm{tr}(M))^2 = 4\det M$.
   - 3.1 Montrer que $\chi_M = \left(X - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)\right)^2$.
   - 3.2 En déduire que M est diagonalisable si, et seulement si, $M = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M) I_2$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer A^2 en fonction de A.
2. En déduire que A est diagonalisable.

PROBLÈME

Première partie :
Polynômes de Lagrange

Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Pour $1 \le i \le n$, on définit le polynôme L_i par :

$$L_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{(X - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

1. Quel est le degré de L_i ?
2. Soit $1 \le j \le n$ avec $j \neq i$. Justifier que $L_i(x_j) = 0$.
3. Que vaut $L_i(x_i)$?
4. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. On pose $L = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k$. Montrer que pour tout $1 \le i \le n$, $L(x_i) = y_i$.
5. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=1}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.
   - 5.1 Montrer que $\langle .,. \rangle$ défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   - 5.2 Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $1 \le i \le n$. Montrer que $\langle L_i, P\rangle = P(x_i)$.
   - 5.3 En déduire que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Deuxième partie :
Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose, *jusqu'à la fin du problème*, que u possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes.

6. Justifier que u est diagonalisable.
   Pour $1 \le i \le n$, soit e_i un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i
7. Montrer que $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$.
8. Soit $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $uw = wu$.
   - 8.1 Montrer, pour $1 \le i \le n$, que $w(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$.
   - 8.2 En déduire que w est diagonalisable.

Troisième partie :
Racine carrée d'un endomorphisme diagonalisable

On suppose dans cette partie que les valeurs propres de u sont positives $(1 \le \forall i \le n,\ \lambda_i \ge 0)$.
Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $v^2 = u$.

9. Montrer que $uv = vu$.
10. En déduire que v est diagonalisable.
11. Montrer que pour tout $1 \le i \le n$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $v(e_i) = \alpha_i e_i$. Puis que $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$ ou $\alpha_i = -\sqrt{\lambda_i}$.
12. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $1 \le \forall i \le n$, $Q(\lambda_i) = \alpha_i$.
13. Montrer que $v = Q(u)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END