Devoir Surveillé $N°$ 3

u $\mathscr{L}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PSI

Questions de cours

1. Rappeler la définition du polynôme caractéristique.
2. Rappeler le théorème Cayley-Hamilton.
3. Rappeler la définition du sous espace propre d'un endomorphisme associé à une valeur propre.
4. Rappeler la défintion du spectre d'un endomorphisme.

Exercice 1

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 en fonction de A.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer les sous espaces propres de A.
4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si $a \neq 1$ alors A est diagonalisable.
2. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $a \neq 1$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Montrer que A^2 est diagonalisable.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Pour $1 \leq i \leq r$, on pose

$$L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Première partie : Polynômes de Lagrange

1. Justifier que $r \leq n$.
2. Quel est le degré de L_i.
3. Pour $1 \leq i, k \leq r$, calculer $L_i(\lambda_k)$.
4. Montrer que $(L_1, \ldots, L_r)$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.
5. Soit $P \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, montrer que $P = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) L_i$.
6. Justifier que $\sum_{i=1}^{r} L_i = 1$.

Deuxième partie : Somme des sous espaces propres

Le but de cette partie est de démontrer que la somme des sous espaces propres est directe. Dans cette partie L désigne le polynôme

$$L = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)$$

7. Soit $1 \leq i \leq r$. Montrer que $L = \alpha_i (X - \lambda_i) L_i$ où α_i est une constante à déterminer.
8. Pour $1 \leq i \leq r$, montrer que $\ker(L_i(u)) \subseteq \ker L(u)$.
9. Pour $1 \leq i \leq r$, montrer que $E_{\lambda_i}(u) \subseteq \ker L(u)$.
10. Pour $1 \leq i \leq r$, montrer que si $x \in \ker(L(u))$ alors $L_i(u)(x) \in E_{\lambda_i}(u)$.
11. Soit $x \in \ker L(u)$.
    - 11.1 Justifier que $x = \sum_{i=1}^{r} L_i(u)(x)$.
    - 11.2 En déduire que $\ker L(u) = \sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.
12. Soit $(x_1, \ldots, x_r) \in E_{\lambda_1}(u) \times \ldots \times E_{\lambda_r}(u)$ tel que $\sum_{i=1}^{r} x_i = 0$. Soit $1 \leq j \leq r$.
    - 12.1 Soit $1 \leq i \leq r$ avec $i \neq j$. Montrer que $L_i(u)(x_j) = 0$.
    - 12.2 Justifier que $x_j = \sum_{i=1}^{r} L_i(u)(x_j)$.
    - 12.3 En déduire que $x_j = L_j(u)(x_j)$.
    - 12.4 Montrer que $x_j = 0$
13. Démontrer alors que $\ker L(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.
14. En déduire que si L est un polynôme annulateur de u alors u est diagonalisable.