Corrigé

Devoir Surveillé N° 3

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$\mathcal{U}$ $\mathcal{L}(E)$ PSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Par un calcul simple, on a $A^2 = 3A$.
2. D'après le résultat de la question précédente, $X^2 - 3X = X(X-3)$ est un polynôme annulateur de A scindé a racines simples, donc A est diagonalisable.
3. Les sous espaces propres de A. On a $\chi_A = X^2(X-3)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$.
   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A)$ si, et seulement si, $x + y + z = 0$. Donc $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A)$ si, et seulement si, $x = y = z$. Donc $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si $a \neq 1$ alors A admet deux valeurs propres distinctes 1 et a, par suite elle est diagonalisable.
2. Si $a \neq 1$ alors A est diagonalisable (le résultat de la question précédente).
   Si $a = 1$ alors A n'est pas diagonalisable, en effet $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, par suite $\dim E_1(A) = 1 \neq m_1 = 2$.

Exercice 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a $A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. Or la matrice D est diagonale, la matrice A^2 est alors diagonalisable.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Pour $1 \leq i \leq r$, on pose

$$L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Première partie : Polynômes de Lagrange

1. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des racines deux à deux distinctes du polynôme caractéristique de u, or ce dernier est de degré n, on a donc $r \leq n$.
2. Le polynôme L_i est produit de $r-1$ polynômes de degré 1, donc $\deg L_i = r-1$.
3. Pour $1 \leq i, k \leq r$, calculer $L_i(\lambda_k)$.

   Si $k = i$, on a $L_i(\lambda_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 1$.
   Si $k \neq i$, dans ce cas $X - \lambda_k$ divise L_i donc $L_i(\lambda_k) = 0$. Plus précisément
   $$L_i = \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} \prod_{j=1, j\neq i, j\neq k}^{r} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$
   D'où le résultat.
4. La famille $(L_1, \ldots, L_r)$ a r éléments et $\dim \mathbb{K}_{r-1}[X] = r$, il suffit alors de démontrer qu'il est libre. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i L_i = 0$. Pour $1 \leq k \leq r$, on a $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i L_i(\lambda_k) = 0$, tenant-compte le résultat de la question précédente, on obtient $\alpha_k = 0$.
5. Soit $P \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$. Puisque $(L_1, \ldots, L_r)$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$ ils existent $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que $P = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i L_i$. Pour $1 \leq k \leq r$, on a $P(\lambda_k) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i L_i(\lambda_k) = \alpha_k L_k(\lambda_k) = \alpha_k$. Ainsi $P = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) L_i$.
6. Par application du résultat de la question précédente au polynôme constant $P = 1$.

Deuxième partie : Somme des sous espaces propres

Le but de cette partie est de démontrer que la somme des sous espaces propres est directe. Dans cette partie L désigne le polynôme

$$L = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)$$

7. Soit $1 \leq i \leq r$.

$$\begin{aligned} L &= \prod_{j=1}^{r}(X-\lambda_j) = (X-\lambda_i)\prod_{j=1, j\neq i}^{r}(X-\lambda_j) \\ &= (X-\lambda_j)\prod_{j=1, j\neq i}^{r}(\lambda_i-\lambda_j)\prod_{j=1, j\neq i}^{r}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \\ &= \alpha_i(X-\lambda_i)L_i \end{aligned}$$

Où $\alpha_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{r}(\lambda_i-\lambda_j)$

8. Soit $1 \leq i \leq r$ et $x \in \ker(L_i(u))$. On a $L(u) = \alpha_i(u-\lambda_i \operatorname{Id}_E)L_i(u)$, donc

$$L(u)(x) = \alpha_i\left(u-\lambda_i \operatorname{Id}_E\right)\left(L_i(u)(x)\right) = \alpha_i\left(u-\lambda_i \operatorname{Id}_E\right)(0) = 0$$

Par conséquent $x \in \ker(L(u))$.

9. Soit $1 \leq i \leq r$ et $x \in E_{\lambda_i}(u)$. On a $L(u) = \alpha_i L_i(u)(u-\lambda_i \operatorname{Id}_E)$, donc

$$L(u)(x) = \alpha_i\left(L_i(u)\right)\left((u-\lambda_i \operatorname{Id}_E)(x)\right) = \alpha_i\left(L_i(u)\right)(0) = 0$$

Par conséquent $x \in \ker(L(u))$.

10. Soit $1 \leq i \leq r$ et $x \in \ker(L(u))$. On a

$$(u-\lambda_i \operatorname{Id}_E)(L_i(u)(x)) = \left((u-\operatorname{Id}_E)L_i(u)\right)(x) = \frac{1}{\alpha_i}L(u)(x) = 0$$

Donc $(L_i(u))(x) \in E_{\lambda_i}(u)$.

11. Soit $x \in \ker L(u)$.

11.1 On a $1 = \sum_{i=1}^{r} L_i$, donc $\operatorname{Id}_E = \sum_{i=1}^{r} L_i(u)$. Par conséquent $x = \operatorname{Id}_E(x) = \sum_{i=1}^{r} L_i(u)(x)$.

11.2 Puisque $x \in \ker(L(u))$, on a donc $L_i(u)(x) \in E_{\lambda_i}(u)$, donc $x = \sum_{i=1}^{r} L_i(u)(x) \in \sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$. Or les $E_{\lambda_i}(u)$ sont des sous espaces vectoriels de $\ker(L(u))$, on a donc $\ker L(u) = \sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.

12. Soit $(x_1, \ldots, x_r) \in E_{\lambda_1}(u) \times \ldots \times E_{\lambda_r}(u)$ tel que $\sum_{i=1}^{r} x_i = 0$. Soit $1 \leq j \leq r$.

12.1 Soit $1 \leq i \leq r$ avec $i \neq j$. Puisque $x_j \in E_{\lambda_j}(u)$, on a donc $L_i(u)(x_j) = L_i(\lambda_j)x_j = 0$ car $L_i(\lambda_j) = 0$.

12.2 Même raisonnement de la question 11.1.

12.3 On a $x_j = \sum_{i=1}^{r} L_i(u)(x_i) = L_j(u)(x_j) + \underbrace{\sum_{i=1, i\neq j} L_j(u)(x_i)}_{=0} = L_j(u)(x_j)$.

12.4 On a $\sum_{i=1}^{r} x_i = 0$, donc $L_j(u)\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = 0$ ou encore $\sum_{i=1}^{r} L_j(u)(x_i) = 0$. Pour $i \neq j$ on a $L_j(u)(x_i) = 0$. La somme précédente donne $L_j(u)(x_j) = 0$, par suite $x_j = L_j(u)(x_j) = 0$.

13. D'après le résultat de la question 12 la somme $\sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$ est directe. On en déduire alors, par le résultat de la question 11.2, que $\ker L(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.

14. Si L est un polynôme annulateur de u alors $E = \ker(L(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$. Les sous espaces propres de u sont alors supplémentaires dans E, par conséquent u est diagonalisable.