Corrigé

Devoir Surveillé N° 3

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathscr{L}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

   1.1 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2P(t)e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2P(t)}{e^t} = 0.$

   1.2 D'après la question précédente on a $P(t)e^{-t} =_{+\infty} o(\frac{1}{t^2})$,par la règle de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge absolument donc converge. En particulier l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge.

Pour $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$

2. Notons que le résultat de la question précédente justifie la définition de l'application $\langle .,. \rangle$.
Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\langle P_1+\lambda P_2, Q\rangle &= \int_0^{+\infty} (P_1(t)+\lambda P_2(t))Q(t)e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} P_1(t)Q(t)e^{-t}dt + \lambda\int_0^{+\infty} P_2(t)Q(t)e^{-t}dt \\
&= \langle P_1, Q\rangle + \lambda\langle P_2, Q\rangle
\end{aligned}$$

D'où la linéarité par rapport à la première variable.
Soient $P,Q \in \mathbb{R}$, on a $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}dt = \langle Q,P\rangle$, donc l'application est symétrique.Notons aussi que la symétrie implique la linéarité par rapport à la deuxième variable.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt \geq 0$. De plus si $\langle P,P\rangle = 0$, tenant compte la continuité et la positivité de $t \mapsto P(t)e^{-t}$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}_+, P(t)e^{-t} = 0$, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, P(t) = 0$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines, on en déduit alors que $P = 0$.

3. Soit $k \geq 1$. Par une intégration par parties on a

$$\begin{aligned}\langle X^k, 1\rangle &= \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = -\int_0^{+\infty} t^k \left(e^{-t}\right)' = -\left[t^k e^{-t}\right]_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \\ &= -k\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt = k\langle X^{k-1}, 1\rangle\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\langle X^n, 1\rangle = n!$:
Pour $n = 0$, on a

$$\langle X^0, 1\rangle = \langle 1, 1\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -\left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\langle X^n, 1\rangle = n!$. On , D'après la question précédente, $\langle X^{n+1}, 1\rangle = (n+1)\langle X^n, 1\rangle$, en combinant avec l'hypothèse de récurrence, on obtient $\langle X^{n+1}, 1\rangle = (n+1)n! = (n+1)!$. D'où le résultat.

4. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\langle X^m, X^n\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n t^m e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{n+m} e^{-t} dt = \langle X^{n+m}, 1\rangle = (n+m)!$.

5. Par définition de la norme on a, $\|X^n\| = \sqrt{\langle X^n, X^n\rangle} = \sqrt{(2n)!}$.

Exercice 2 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det M$$

2. Le discriminant du polynôme caractéristique χ_M est $\Delta = (\operatorname{tr}(M))^2 - 4\det M > 0$, donc χ_M possède deux racines réelles distinctes, il est alors scindé à racines simples, par suite M est diagonalisable.

3. On suppose dans cette question que $(\operatorname{tr}(M))^2 = 4\det M$.

   3.1 $\chi_M = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \frac{1}{4}(\operatorname{tr}(M))^2 = \left(X - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(M)\right)^2$.

   3.2 Puisque $\frac{1}{2}\operatorname{tr} M$ est la seule valeur propre de M, alors M est diagonalisable si, et seulement si, $X - \frac{1}{2}\operatorname{tr} m$ est annulateur de M si, et seulement si, $M = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(M) I_2$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = nA$

2. D'après le résultat de la questio précédente, $X^2 - X = X(X-n)$ est un polynôme annulateur de A qui est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

PROBLÈME

Première partie : Polynômes de Lagrange

Soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Pour $1\le i\le n$, on définit le polynôme L_i par :

$$L_i=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{(X-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

1. L_i est un produit de $n-1$ polynômes de degré 1, donc $\deg L_i=n-1$.

2. Soit $1\le j\le n$ avec $j\neq i$. Dans ce cas on a $L_i=\dfrac{X-x_j}{x_i-x_j}\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq i}}^{n}\frac{(X-x_k)}{(x_i-x_k)}$. Donc

$$L_i(x_j)=\frac{x_j-x_j}{x_i-x_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq i}}^{n}\frac{(x_j-x_k)}{(x_i-x_k)}=0$$

3. $L_i(x_i)=\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{(x_i-x_k)}{(x_i-x_k)}=1$

4. Soient $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$. On pose $L=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}y_kL_k$. On a

$$L(x_i)=\sum_{k=1}^{n}y_kL_k(x_i)=y_iL_i(x_i)+\sum_{k=1,k\neq i}^{n}y_kL_k(x_i)=y_i$$

Car $L_k(x_i)=0$ si $k\neq i$.

5. Pour $P,Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(x_k)Q(x_k)$.

5.1 Soient $P_1,P_2,Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors

$$\langle P_1+\lambda P_2,Q\rangle=\sum_{k=1}^{n}(P_1(x_k)+\lambda P_2(x_k))Q(x_k)=\sum_{k=1}^{n}P_1(x_k)Q(x_k)+\lambda\sum_{k=1}^{n}P_2(x_k)Q(x_k)=\langle P_1,Q\rangle+\lambda\langle P_2,Q\rangle$$

Ainsi l'application est linéaire par rapport à la première variable.
Soit $P,Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(x_k)Q(x_k)=\sum_{k=1}^{n}Q(x_k)P(x_k)=\langle Q,P\rangle$, donc l'application est symétrique. La linéarité par rapport à la première variable et la symétrie entraîne la bilinéarité de l'application.
Soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $\langle P,P\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(x_k)^2\ge 0$. Si de plus $\langle P,P\rangle=0$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(x_k)^2=0$, donc $1\le\forall k\le n$, $P(x_k)^2=0$ ou encore $P(x_k)=0$. Le polynôme P admet alors n racines, et comme son degré est majoré par $n-1$, il vient alors que $P=0$.

5.2 Soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $1\le i\le n$. On a

$$\langle L_i,P\rangle=\sum_{k=1}^{n}L_i(x_k)P(x_k)=L_i(x_i)P(x_i)+\sum_{k=1,k\neq i}^{n}L_i(x_i)P(x_k)=L_i(x_i)P(x_i)=P(x_i).$$

D'où le résultat.

5.3 Soit $1\le i,j\le n$. D'après la question précédente, on a $\langle L_i,L_j\rangle=L_j(x_i)$. Par suite $\langle L_i,L_j\rangle=0$ si $i\neq j$ et $\langle L_i,L_i\rangle=1$. Ce qui montre que la famille $(L_1,\dots,L_n)$ est orthonormale, en particulier elle est libre. Puisque $\dim\mathbb{R}_{n-1}[X]=n$, c'est alors une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit alors que $(L_1,\dots,L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Deuxième partie :
Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose, *jusqu'à la fin du problème*, que u possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes.

$\boxed{6.}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines du polynôme caractéristique de u, il est alors scindé à racines simples, et donc u diagonalisable .

$\boxed{7.}$ λ_i est une valeur propre simple de u, donc $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1$ c'est-à-dire $E_{\lambda_i}(u)$ est une droite vectorielle. Puisque e_i est vecteur non nul de $E_{\lambda_i}(u)$, on a donc $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$.

$\boxed{8.}$ Soit $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $uw = wu$.

$\boxed{8.1}$ Soit $1 \leq i \leq n$, on a $u(w(e_i)) = w(u(e_i)) = w(\lambda_i e_i) = \lambda_i w(e_i)$, donc $w(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$.

$\boxed{8.2}$ Pour $1 \leq i \leq n$, on a $w(e_i) \in E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$, il existe alors $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $w(e_i) = \alpha_i e_i$, par suite e_i est un vecteur propre de w. On en déduit alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de w. L'endomorphisme w est donc diagonalisable.

Troisième partie :
Racine carrée d'un endomorphisme diagonalisable

On suppose dans cette partie que les valeurs propres de u sont positives $(1 \leq \forall i \leq n,\ \lambda_i \geq 0)$. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $v^2 = u$.

$\boxed{9.}$ On a $uv = v^2 v = v v^2 = vu$, donc les deux endomorphisme u et v commutent.

$\boxed{10.}$ Puisque u et v commutent, d'après le résultat de la question 8, l'endomorphisme v est diagonalisable.

$\boxed{11.}$ Par la commutativité de u et v et le résultat de la question 8.1, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $v(e_i) = \alpha_i e_i$.
D'une part on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$, d'autre part $u(e_i) = v^2(e_i) = \alpha_i^2 e_i$, donc $\lambda_i = \alpha_i^2$, par suite $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$ ou $\alpha_i = -\sqrt{\lambda_i}$.

$\boxed{12.}$ Il suffit d'appliquer le résulta de la question 4 avec $y_i = \alpha_i$ et $x_i = \lambda_i$.

$\boxed{13.}$ Soit $1 \leq i \leq n$. Puisque e_i est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i, on obtient $Q(u)(e_i)) = Q(\lambda_i)(e_i) = \alpha_i e_i$, mais on a aussi $v(e_i) = \alpha_i$. Donc $1 \leq i \leq n$, $Q(u)(e_i) = v(e_i)$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il vient alors que $Q(u) = v$

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END