Devoir Surveillé $N°$ 4

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$\mathcal{L}(E)$

PSI

Questions de cours

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.
2. Rappeler la définition d'un endomorphisme orthogonal.
3. Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal.
4. Enoncer le théorème spectral.
5. Rappeler la définition de l'endomorphisme adjoint .

Exercice 1

Sans faire de calculs, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.
2. Montrer que si $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \mathbb{R}_+$, alors pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$.
3. Montrer que si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \mathbb{R}_+$.

PROBLÈME

Soit E un espace euclidien, c'est-à-dire E est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $\langle ., .\rangle$, on désigne par $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Première partie : Projecteur orthogonal

Soit p un projecteur de E c'est-à-dire $p^2 = p$.

1. On suppose dans cette question que p est un projecteur orthogonal.
   - 1.1 Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.
   - 1.2 En déduire que p est symétrique.

1.3 Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

1.4 Vérifier que pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x\rangle \geq 0$.

2. On suppose dans cette question que p est symétrique.

2.1 Soit $x \in \ker p$ et $y \in \operatorname{Im} p$. Montrer que $\langle x, y\rangle = 0$.

2.2 En déduire que p est un projecteur orthogonal.

Deuxième partie : Endomorphisme orthogonal

Soit u un endomorphisme orthogonal de E.

3. Montrer que u est un automorphisme de E et que u^{-1} est orthogonal.

4. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

5. En déduire que u transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E.

6. Soit λ une valeur propre de u et e un vecteur propre de u associé à λ.

6.1 Montrer que $\|u(e)\|^2 = \lambda^2\|e\|^2$.

6.2 En déduire que $\operatorname{Sp}(u) \subseteq \{-1, 1\}$.

Troisième partie : Endomorphisme orthogonal et sous espace stable

Soit u un endomorphisme orthogonal, on considère l'endomorphisme $v = u + u^{-1}$.

7. Montrer que v est un endomorphisme symétrique de E. En déduire que v est diagonalisable.
Soit e' un vecteur propre de v.

8. Montrer que $\operatorname{Vect}(e', u(e'))$ est un sous espace stable par u.

9. En déduire que u admet au moins un sous espace stable non nul de dimension ≤ 2.
On suppose dans la suite que F est un sous espace vectoriel de dimension 2 et sable par u. On note $v = u|_F$ et $\mathscr{B}_F = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de F.

10. Montrer que v est un endomorphisme orthogonal de F.

11. Vérifier que $\|v(e_1)\| = \|v(e_2)\| = 1$ et $\langle v(e_1), v(e_2)\rangle = 0$.

12. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $v(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)v_2$.

13. Montrer que $v(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$ ou $v(e_2) = \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2$.

14. Déterminer la matrice de v dans la base $\mathscr{B}_F$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END