Corrigé

Devoir Surveillé $N°$ 4

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathscr{L}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique, le théorème spectral affirme qu'elle est diagonalisable.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

1. u étant symétrique, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u, et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u associées respectivement au vecteurs propres $e_1, \ldots, e_n$ (de sorte que $u(e_i) = \lambda_i e_i$). Soit $x \in E$, et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a donc $\langle u(x), x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j\rangle$. Comme $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ et $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$, on a donc $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$ (car $\lambda_i \geq 0$).

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et e un vecteur propre associé à λ. On a $\langle u(e), e\rangle = \lambda\langle e, e\rangle = \lambda\|e\|^2$. En tenant compte $\|e\| > 0$, il vient que $\lambda = \dfrac{\langle u(e), e\rangle}{\|e\|^2} \geq 0$.

PROBLÈME

Soit E un espace euclidien, c'est-à-dire E est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$, on désigne par $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Première partie :
Projecteur orthogonal

Soit p un projecteur de E c'est-à-dire $p^2 = p$.

1. On suppose dans cette question que p est un projecteur orthogonal.

1.1 Soit $x, y \in E$, on a $p(x \in \operatorname{Im} p)$ et $y - p(y) \in \ker p$ car $p(y - p(y)) = p(y) - p^2(y) = 0$, donc $\langle p(x), y - p(y)\rangle = 0$, par suite $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.

1.2 Soit $x, y \in E$. On a $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(y), p(x)\rangle = \langle p(y), x\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. Donc p symétrique.

1.3 Soit $x \in E$, on a $x \perp x - p(x)$, par le théorème de Pythagore, il vient que $\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$. D'où $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

1.4 Soit $x \in E$, d'après le résultat de la question 1, on a $\langle p(x), x\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle = \|p(x)\|^2 \geq 0$.

2. On suppose dans cette question que p est symétrique.

2.1 Soit $x \in \ker p$ et $y \in \operatorname{Im} p$. On a $p(y) = y$, donc $\langle x, y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle = 0$.

2.2 La question précédent dit que $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sot orthogonaux, ainsi p est un projecteur orthogonal.

Deuxième partie : Endomorphisme orthogonal

Soit u un endomorphisme orthogonal de E.

3. Soit $x \in \ker u$, on a $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, par suite $x = 0$. Il en résulte que u est un automorphisme. Soit $x \in E$, on a $\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$. C'est bien que u est un endomorphisme orthogonal.

4. Soit $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi u conserve le produit scalaire.

5. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Par le résultat de la question précédente, on a $\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$, donc $\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = 1$ si $i = j$, en d'autre termes $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille orthonormale de E, en particulier libre. Puisque le nombre d'éléments de cette famille est égale à la dimension de E, il s'agit alors d'une base et donc d'une base orthonormale de E. Ainsi u transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E.

6. Soit λ une valeur propre de u et e un vecteur propre de u associé à λ.

6.1 On a $\|u(e)\|^2 = \|\lambda e\|^2 = \lambda^2\|e\|^2$.

6.2 Puisque u est un endomorphisme orthogonale, on a donc $\|u(e)\|^2 = \|e\|^2$, et donc $\lambda^2\|e\| = \|e\|^2$, par suite $\lambda^2 = 1$ (car $e \neq 0$). On en déduit alors que $\lambda = \pm 1$. D'où $\operatorname{Sp}(u) \subseteq \{-1, 1\}$.

Troisième partie : Endomorphisme orthogonal et sous espace stable

Soit u un endomorphisme orthogonal, on considère l'endomorphisme $v = u + u^{-1}$.

7. Soit $x, y \in E$, on a

$$\langle v(x), y\rangle = \langle u(x) + u^{-1}(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle u^{-1}(x), y\rangle$$

D'une part $\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(u^{-1}y))\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$ puisque u conserve le produit scalaire, d'autre par $\langle u^{-1}(x), y\rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u(y)\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Donc

$$\begin{aligned}\langle v(x), y\rangle &= \langle u(x), y\rangle + \langle u^{-1}(x), y\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle + \langle x, u(y)\rangle \\ &= \langle x, u^{-1}(y) + u(y)\rangle = \langle x, v(y)\rangle\end{aligned}$$

L'endomorphisme v est symétrique.
v étant symétrique d'après le théorème spectral il est diagonalisable.
Soit e' un vecteur propre de v.

8. On a $u(e') \in \text{Vect}(e', u(e'))$, il suffit alors de montrer que $u^2(e') \in \text{Vect}(e', u(e'))$.
Puisque e' est un vecteur propre de v, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $v(e') = te'$, c'est-à-dire $u(e') + u^{-1}(e') = te'$, par suite $u(e') = te' - u^{-1}(e')$, en appliquant u, on obtient $u^2(e') = tu(e') - e'$ qui bien un élément de $\text{Vect}(e', u(e'))$. D'où le résultat.

9. Le sous espace vectoriel $\text{Vect}(e', u(e'))$ est stable par u et de dimension ≤ 2 car il engendré par deux vecteurs, et puisque e' est un vecteur non nul de $\text{Vect}(e', u(e'))$, ce dernier est un sous espace vectoriel et de dimension ≥ 1. .
On suppose dans la suite que F est un sous espace vectoriel de dimension 2 et sable par u. On note $v = u|_F$ et $\mathscr{B}_F = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de F.

10. Soit $x \in F$, on a $\|v(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|$, donc v est un endomorphisme orthogonal de F.

11. Puisque (e_1, e_2) est une base orthonormale de F, son image $(v(e_1), v(e_2))$ par est aussi une base orthonormale de F, c'est-à-dire $\|v(e_1)\| = \|v(e_2)\| = 1$ et $\langle v(e_1), v(e_2)\rangle = 0$.

12. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $v(e_1) = ae_1 + be_2$, comme $1 = \|v(e_1)\|^2 = a^2 + b^2$, il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$, donc $v(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$.

13. On pose $w = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_1$ et montrons que $v(e_2) = \pm w$.
On a $\|w\| = \|v(e_1)\| = 1$ et $\langle w, v(e_1)\rangle = -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 0$, donc $(w, v(e_1))$ est une base orthonormale de F. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $v(e_2) = \alpha w + \beta v(e_1)$. On a $\langle v(e_1), v(e_2)\rangle = 0$, donc $\alpha\langle v(e_1), w\rangle + \beta\|v(e_1)\|^2 = 0$, par suite $\beta = 0$, on donc $v(e_2) = \alpha w$. De l'égalité $\|w\|^2 = 1$, il vient que $\alpha^2\|v(e_2)\| = 1$, et donc $\alpha^2 = 1$ c'est-à-dire $\alpha = \pm 1$. D'où $v(e_2) = \pm w$.

14. D'après ce qui précède, $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F}(v) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F}(v) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END