Devoir Surveillé $N°$ 5

$E(X)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$V(X)$

PSI

Questions de cours

1. Rappeler la définition de deux événements incompatibles.
2. Rappeler la définition de deux événements indépendants.
3. Rappeler la définition de l'espérance (dans le cas fini).
4. Rappeler la formule de transfert (dans le cas fini).
5. Rappeler la définition de la loi de Poisson (de paramètre $\lambda > 0$) .

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$p((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1} j!} , \ \forall i, j \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Montrer que $p(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$. (Indication : Remarquer que $(X = Y) = \cup_{n\in\mathbb{N}} ((X = n) \cap (Y = n))$).

PROBLÈME

Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle la fonction génératrice de X, et on note G_X, la fonction ; $G_X(t) = E(t^X)$

Première partie : Cas d'une variable aléatoire finie

Dans cette partie X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p(X = k) t^k$.

$\boxed{2.}$ Calculer $G_X(1)$ et montrer que $G'_X(1) = E(X)$.

$\boxed{3.}$ Montrer que $E(X(X-1)) = G''_X(1)$. En déduire que $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

$\boxed{4.}$ Donner l'expression de G_X dans chaque cas suivant :

$\boxed{4.1}$ X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

$\boxed{4.2}$ X suit la loi binômiale de paramètre (n,p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

Deuxième partie :
Cas d'une variable aléatoire infinie

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note R_X le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} p(X=n)t^n$.

$\boxed{5.}$ Montrer que $R_X \geq 1$.

$\boxed{6.}$ Montrer que pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$.

$\boxed{7.}$ Montrer que si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles $G_X = G_Y$ alors X et Y ont même loi (i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(X=n) = p(Y=n)$).

$\boxed{8.}$ Montrer que si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

$\boxed{9.}$ Somme de lois de Poisson : On suppose dans cette question que X et Y suivent respectivement la loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2.

$\boxed{9.1}$ Montrer que $R_X = R_Y = +\infty$, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda_1(t-1)}$ et $G_Y(t) = e^{\lambda_2(t-1)}$.

$\boxed{9.2}$ En déduire que si X et Y sont indépendantes alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Troisième partie :
Espérance et fonction génératrice

Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$\boxed{10.}$ Montre que si $R_X > 1$ alors X admet une espérance et que $E(X) = G'_X(1)$.
On suppose pour la suite de cette partie que G_X est dérivable en 1. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kp(X=k)$.(☞ Pour la suite, on ne suppose pas que $R_X > 1$).

$\boxed{11.}$ Montrer que pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{G_X(t) - G(1)}{t-1} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1})$.

$\boxed{12.}$ Montrer que pour tous $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1}) \leq \dfrac{G_X(t) - G(1)}{t-1}$.

$\boxed{13.}$ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq G'_X(1)$.

$\boxed{14.}$ Montrer que X admet une espérance et que $E(X) \leq G'_X(1)$.

$\boxed{15.}$ Montrer, en exploitant le résultat de la question 11, que $E(X) = G'_X(1)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END