Corrigé

Devoir Surveillé $N°$ 5

$E(X)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$V(X)$

PSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$p((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}\ ,\ \forall i,j \in \mathbb{N}$$

1. La loi de X :

$$\begin{aligned} p(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} p((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} \\ &= \frac{1}{e2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{e2^{i+1}} e = \frac{1}{2^{i+1}} \end{aligned}$$

ainsi

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \ p(X=i) = \frac{1}{2^{i+1}}$$

La loi de Y :

$$\begin{aligned} p(Y=j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} p((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} \\ &= \frac{1}{ej!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{ej!}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{ej!} \end{aligned}$$

ainsi Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

2. On a $(X+1)(\Omega) = N^*$, et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $p(X+1=i) = p(X=i-1) = \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^{i-1}$. Donc $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On en déduit que $E(X) = E(X+1)-1 = 2-1 = 1$ et $V(X) = V(X+1) = 2$

3. Y suit la loi de Poisson de paramètre 1, donc $E(Y) = 1$ et $V(Y) = 1$.

4. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on a $p((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!} = p(X=i)p(Y=j)$, donc les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

5. On a $(X=y) = \cup_{n\in\mathbb{N}}((X=n)\cap(Y=n)$ et les événements $(X=n)\cap(Y=n)$, $n\in\mathbb{N}$ sont deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned} p(X=y) &= p(\cup_{n\in\mathbb{N}}(X=n)\cap(Y=n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} p((X=n)\cap(Y=n)) \\ &= \frac{1}{e2^{n+1}n!} = \frac{1}{2e}\frac{(1/2)^n}{n!} = \frac{1}{2e}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

PROBLÈME

Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle la fonction génératrice de X, et on note G_X, la fonction ; $G_X(t) = E(t^X)$

Première partie :
Cas d'une variable aléatoire finie

Dans cette partie X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

1. Par la formule de transfert ($f(x) = t^x$), on a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $G_X(t) = E(f(X)) = \sum_{k=0}^{n} f(k)p(X=k) = \sum_{k=0}^{n} t^k p(X=k)$.

2. On a $G_X(1) = \sum_{k=0}^{n} p(X=k) = 1$. On a $G'_X(t) = \sum_{k=0}^{n} kt^{k-1}p(X=k)$, donc $G'_X(1) = \sum_{k=0}^{n} kp(X=k) = E(X)$.

3. On a $G''_X(t) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)t^{k-2}p(X=k)$, donc $G''_X(1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p(X-1)$, par le théorème de transfert, on a $G''_X(1) = E(X(X-1))$.
On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2 - X) + E(X) - E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

4. Donner l'expression de G_X dans chaque cas suivant :

4.1 Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X(\Omega) = \{0,1\}$, et on a donc $G_X(t) = t^0p(X=0) + tp(X=1) = 1-p+tp$.

4.2 Si X suit la loi binômiale de paramètre (n,p), alors $X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}$, et on a $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^kp(X=k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(tp)^k(1-p)^{n-k} = (tp+1-p)^n$

Deuxième partie :
Cas d'une variable aléatoire infinie

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note R_X le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} p(X=n)t^n$.

5. La série $\sum_n p(X=n)$ converge (absolument), c'est-à-dire la série entière $\sum_n p(X=n)t^n$ converge (absolument) pour $t=1$, donc $R_X \geq 1$.

6. Si $t \in]-R_X, R_X[$, alors la série $\sum_n p(X=n)t^n$ est absolument convergente, et donc par le théorème de transfert, t^X admet une espérance et on a $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$.

7. Notons que le rayon de convergence et au moins est égale à 1.
Si $G_X = G_Y$ alors $\forall t \in]-,1,1[$, $G_X(t) = G_Y(t)$, par le résulta de la question précédente, $\forall t \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Y=n)t^n$, donc par unicité du développement en série entière, on a $n \in \mathbb{N}$, $p(X=n) = p(Y=n)$. D'où le résultat.

8. Si X et Y sont indépendantes alors il en est de même pour les variables aléatoires t^X et t^Y. Donc $G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$.

9. Somme de lois de Poisson : On suppose dans cette question que X et Y suivent respectivement la loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2.

   9.1 Rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{e^{-\lambda_1}\lambda^n}{n!}$:
   On a $\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^{-\lambda_1}\lambda_1^n} = \frac{\lambda_1}{n+1} \to 0$, donc $R_X = +\infty$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda_1^n}{n!}t^n = e^{-\lambda_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t\lambda_1)^n}{n!} = e^{-\lambda_1}e^{t\lambda_1} = e^{\lambda_1(t-1)}$.
   De même, on a $R_Y = +\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = e^{\lambda_2(t-1)}$.

   9.2 Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)}e^{\lambda_2(t-1)} = e^{\lambda_1+\lambda_2}(t-1)$. Soit Z une variable aléatoire de la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$, d'après le résultat de la question précédente on a $G_Y(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2}(t-1) = G_{X+Y}(t)$, donc les deux variables aléatoire Z et $X+Y$ ont même loi. il en résultat alors que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Troisième partie :
Espérance et fonction génératrice

Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

10. Si $R_X > 1$. Le rayon de convergence de la série entière (dérivée) $\sum_n np(X=n)t^{n-1}$ est $R_X > 1$ et pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n)t^{n-1}$, en particulier cette série est absolument convergente pour $t=1$, c'est-à-dire la série $\sum_n np(X=n)$ est (absolument) convergente, il vient alors que t^X admet une espérance et que $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n) = G'_X(1)$.
On suppose pour la suite de cette partie que G_X est dérivable en 1. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} kp(X=k)$.(☞ Pour la suite, on ne suppose pas que $R_X > 1$).

11. Pour $t \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned} G_X(t) - G_X(1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k)(t^k-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k)(t^k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k)(t-1)(1+t+\ldots+t^{k-1}) \end{aligned}$$

Notons que le terme d'indice $k=0$ est nul dans la somme précédente, donc $\dfrac{G_X(t)-G(1)}{t-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1})$.

$\boxed{12.}$ Pour $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1}) &\leq \sum_{k=1}^{n} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1}) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1}) = \frac{G_X(t)-G(1)}{t-1}\end{aligned}$$

$\boxed{13.}$ En passant à la limite quand $n \to 1$, dans l'inégalité précédente (et en tenant compte que le terme minorant est somme finie), on obtient $S_n \leq G'_X(1)$.

$\boxed{14.}$ Notons d'abord que S_n est la suite des somme partielles de la série $\sum_n np(X=n)$.

Comme la suite $(S_n)_n$ est majoré (et la série et a termes positifs), alors elle est convergente et on a $E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \leq G'_X(1)$.

$\boxed{15.}$ Il suffit de montrer que $G'_X(1) \leq E(X)$. Pour $t \in [0,1[$, on a

$$p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1}) \leq p(X=k)k$$

car $t^i \leq 1$, comme la série $\sum_k kp(X=k)$ converge, d'après le résultat de question 11, on a

$$\frac{G_X(t)-G(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k)(1+t+\ldots+t^{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kp(X=k) = E(X)$$

En passant à la limite quand $t \to 1$, on obtient $G'_X(1) \leq E(X)$. D'où le résultat.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END