بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$

Polynômes et fractions rationnelles

PCSI

Rappel

Définition :

✎ Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible s'il n'est pas constant et les seuls diviseur de P sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $P = X^5 + X^3 + X$.

Hint : remark that : $r^2 + r + 1 = r^2 + 2r + 1 - r$, ...

Exercice 2

Soit P le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer les racines de P.
2. En déduire la factorisation de P.
3. On pose $F = \dfrac{X+1}{P}$
   (a) Écrire, en justifiant, la forme de la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
   (b) Donner alors la décomposition de F en éléments simples.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, de degré $n \geq 1$, scindé à racines simples i.e P est de la forme

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$$

où les z_k, sont les racines deux à deux distinctes de P. On pose $F = \dfrac{P'}{P}$.

1. Déterminer le degré de F.
2. Quels sont les pôles de F ?
3. Justifier que F peut s'écrire sous la forme $F = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\lambda_k}{X - z_k}$, où les λ_k sont dans $\mathbb{K}$.
4. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ fixé.
   (a) Justifier que $P'(z_i) \neq 0$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - z_i)Q$.

(c) Montrer que $P'(z_i) = Q(z_i)$.
Hint : Think to derive the previous formula

(d) En déduire que $\lambda_i = 1$.

PROBLEM
Factorisation et décoposition en éléments simples

Dans tout le problème j désigne le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1$.

First Part
Factorisation de P_2

1. Déterminer P_0, P_1 et P_2.
2. Montrer que P_0 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P_1.
4. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes P_0 et P_1.
5. Vérifier que $P_2 = (X^4 - X^2 + 1)P_1$.
6. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme P_2.

Second Part
Factorisation de P_n

7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2^n} = j$.
8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2^n} = \overline{j}$.
9. Justifier l'égalité $P_n = P_0(X^{2^n})$.
10. En déduire que les racines du polynôme P_n sont les nombres complexes : $u_k = e^{i\frac{2(3k+1)\pi}{3.2^n}}$ et $v_k = e^{-i\frac{2(3k+1)\pi}{3.2^n}}$ avec k entier compris entre 0 et $2^n - 1$.
11. En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$. Puis dans $\mathbb{R}[X]$.
12. Calculer la somme et les produit des racines de P_n.

Second Part
Décomposition de $\frac{1}{P_n}$

13. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{1}{P_0}$.
14. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{1}{X^{2^n} - j}$.
15. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{1}{X^{2^n} - \overline{j}}$.
16. Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P_n}$ dans $\mathbb{C}(X)$.