بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$

p Espaces vectoriels q

PCSI

Exercice 1

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + 2y + 2z = 0 \ , \ x - y + z + t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de F.
   Soit $G = \text{Vect}((1, 2, 2, 0), (1, -1, 1, 1))$.
3. Vérifier que $\dim G = 2$.
4. Montrer que la somme $F + G$ est directe.
5. En déduire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

PROBLÈME

Étude des sous espaces vectoriels de dimension $n - 1$

Dans tout le problème n désigne un entier ≥ 2, et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Première Partie
Questions préliminaires

1. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
   (a) Montrer que si $F \subseteq G$ alors $\dim F \leq \dim G$.
   (b) Montrer que si $F \subseteq G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$
   (c) On suppose que $\dim F = \dim G$. A-t-on $F = G$? Justifier.
2. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. On suppose que la famille $(v_1, \ldots, v_{p-1})$ est libre.
   (a) Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p)$ est liée si, et seulement si, $v_p \in \text{Vect}(v_1, \ldots, v_{p-1})$.
   (b) En déduire que la famille $(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p)$ est libre si, et seulement si, $v_p \notin \text{Vect}(v_1, \ldots, v_{p-1})$.

Deuxième Partie
Deux exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.
   (a) Vérifier que F est un sous espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$, en déduire que $\dim F = 2$.
2. Dans la suite de cette partie , on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et on considère les réels $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls. On pose $F = \{x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$.

www.aqalmoun.com

(a) Vérifier que F est un sous espace vectoriel de E.
Dans la suite de cette partie on fixe aussi un entier $l \in \{1,\dots,n\}$ tel que $a_l \neq 0$, et pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on pose $u_i = e_i - \frac{a_i}{a_l}e_l$.

(b) Montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $u_i \in F$.
Ind : exprimer les coordonnées de u_i dans la base $\mathscr{B}$.

(c) Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in F$ (un élément de F.)

i. Montrer que $x_l = -\sum_{i=1, i\neq l}^{n} \frac{a_i}{a_l}x_i$.

ii. En déduire que $x = \sum_{i=1, i\neq l}^{n} x_i u_i$.
Ind : remplacer x_l par son expression, dans l'expression de x.

(d) Démontrer que $\dim F = n-1$

Troisième Partie
Une caractérisation

Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $n-1$, et $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})$ une base de F.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon_n \in E$ tel que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n)$ soit libre.
Ind : exploiter le résultat de la question 2. de la première partie.
2. Montrer en fait, que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
3. Montrer que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(\varepsilon_n)$.
4. Soit $x \in E$, il existe alors $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$.

   (a) Montrer que si $x \in F$, alors $\alpha_n = 0$.

   (b) En déduire que $x \in F$ si, et seulement si, $\alpha_n = 0$.
5. Dans la suite de cette partie on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E.

   (a) Montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, il existe un unique vecteur $w_i \in F$ et un unique réel a_i tel que $e_i = w_i + a_i\varepsilon_n$.
   Ind : on pourra utiliser le résulta de la question 3.

   (b) Montrer qu'il existe $l \in \{1,\dots,n\}$ tel que $a_l \neq 0$.
   On fixe maintenant un élément $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, notons $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$ *i.e*, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$.

   (c) Montrer que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)\varepsilon_n$.

   (d) En déduire que $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

   (e) Démontrer alors que $x \in F$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.
6. Conclusion.

www.aqalmoun.com