بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

# Devoir Libre $N°$

Matrices

PCSI



**Exercice 1** Inverser les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\2&0&0\end{pmatrix}$$

**Exercice 2** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'ordre $n$, dont le terme général $a_{ij}=1$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, c'est-à-dire

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2$, puis $A^3$.
2. En déduire une expression de $A^k$, pour $k\in\mathbb{N}^*$.

## PROBLÈME

### Puissance d'une matrice et application

Dans tout le problème, $A$ , $P$ et $D$, désignes les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}7/2&-3/2&-3\\3/2&1/2&-3\\3/2&-3/2&-1\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

### Première partie :
Puissance de $A$

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul des puissances de la matrice $A$.

1. 
   (a) Montrer que la matrice $P$ est inversible, calculer sa matrice inverse $P^{-1}$.

   (b) Vérifier que $P^{-1}\begin{pmatrix}-3/2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/4\\1/2\\-3/4\end{pmatrix}$

2. 
   (a) Vérifier que $AP=PD$, en déduire que $A=PDP^{-1}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(c) Pour $n$, entier naturel, calculer $D^n$.

(d) En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.

## Deuxième partie :
Une application

On considère les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par les conditions initiales

$$x_0 = -4\ ,\ y_0 = -2 \text{ et } z_0 = -1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par les relations de récurrences :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 7/2x_n - 3/2y_n - 3z_n + 1 \\ y_{n+1} &= 3/2x_n + 1/2y_n - 3z_n + 1 \\ z_{n+1} &= 3/2x_n - 3/2y_n - z_n - 2 \end{cases}$$

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Le but de cette partie, est de déterminer les expressions des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ en fonction de $n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = AX_n + B$ (1).
2. On se propose de trouver la matrice colonne $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $U = AU + B$ (2).
   (a) Montrer que la relation (2) est équivaut à $(I_3 - A)U = B$.
   (b) Vérifier que $A^2 - A - 2I_3 = 0$ et que $-1/2A(I_3 - A) = I_3$.
   (c) En déduire que la matrice $I - A$ est inversible et calculer son inverse.
   (d) En déduire que $U = -1/2AB$, et vérifier que $U = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. 
   (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} - U = A(X_n - U)$.
   (b) En déduire par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $X_n - U = A^n(X_0 - U)$.
4. En utilisant l'expression de $A^n$ obtenue dans la première partie, question 2.4, calculer $x_n$, $y_n$ et $z_n$ en fonction de $n$.