بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$

Matrices et applications linéaires

PCSI

PROBLÈME

Dans tout le problème A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

On note $E = \mathbb{R}^3$, et $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E, et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire f est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la matrice A.

Première Partie
Réduction de f

1. Déterminer le rang de A.
2. Quelle est la dimension de $\ker f$?
   Dans la suite de cette partie, on considère les vecteurs :
   $$\varepsilon_1 = (1, -2, 2) \ , \ \varepsilon_2 = (0, 1, 1) \ , \ \varepsilon_3 = (-1, 1, -2)$$
3. Montrer que $\varepsilon := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base e à la base ε.
5. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
6. Calculer $f(\varepsilon_i)$, pour $1 \leq i \leq 3$.
7. Déterminer la matrice D de f dans la base ε.
8. Écrire la relation entre les matrices A, D et P.

Deuxième Partie
Puissance de la matrice A

1. Calculer D^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$
3. En déduire une expression de A^n en fonction de n.

4. Déterminer les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} &=& 16x_n + 4y_n - 4z_n \\ y_{n+1} &=& -18x_n - 4y_n + 5z_n \\ z_{n+1} &=& 30x_n + 8y_n - 7z_n \end{cases}$$

Troisième Partie
Résolution de $X^2 = A$

On se propose dans cette partie de résoudre l'équation $X^2 = A$, c'est-à-dire déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 = A$
Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $Y = P^{-1}XP$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $MD = DM$ si, et seulement si, la matrice M est diagonale.
2. Montrer que $X^2 = A$ si, et seulement si, $Y^2 = D$.
3. Montrer que si $X^2 = A$, alors $YD = DY$.
4. En déduire que les matrices Y vérifiant $Y^2 = D$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.
5. En déduire les matrices X vérifiant $X^2 = A$.

END