Logique et nombres complexes

Exercice 1.

Exprimer à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis donner leurs négations :

1. Tout nombre réel est positif.
2. Le module de tout nombre complexe est un entier.
3. Pour tout nombre réel x il existe un nombre réel y compris entre x et $x+1$.
4. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors les deux entiers sont nuls.
5. Il existe un entier naturel supérieur à tous les autres.

Exercice 2.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction et $x_0\in\mathbb{R}$.
Écrire la négation de l'assertion suivante :

$$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists\eta>0\,,\ \forall x\in\mathbb{R}\,;\ |x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Exercice 3.

Soient P et Q deux assertions (propositions logiques).

1. Écrire les tables de vérités de l'assertion (P et $\overline{Q}$) et de l'assertion $\overline{(P\Rightarrow Q)}$.
2. Que peut-on déduire de la question précédente ?
3. Retrouver le résulta de 2. à l'aide des lois de De Morgan.

Exercice 4.

Soit P l'assertion suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\,,\ \forall y\in\mathbb{R}_+\,;\quad \sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Montrer que l'assertion P est fausse.

Exercice 5.

Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2+n+2 est un entier pair

Exercice 6.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$ par :

$$P(n) : \quad 2^n \leq n!$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
2. Les assertions $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont elles-vraies ?
3. Quelle est la valeur logique de l'assertion $P(4)$.
4. Pour quel valeur de n, l'assertion $P(n)$ est vraie.

Exercice 7.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in N$, $1 + nx \leq (1+x)^n$.

Exercice 8.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = 1+2+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k \; , \; T_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \; \text{ et } U_n = 1^3+2^3+\ldots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 9.

On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2.
2. En déduire les relations suivantes : $1 + j + j^2 = 0$, $j^3 = 1$ et $\dfrac{1}{j} = j^2 = \overline{j}$.

Exercice 10.

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$ et $1 - e^{\theta} = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$.

Exercice 11.

1. Soit z un nombre complexe différent de 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
2. Soit x un nombre réel.
   - 2.1 Résoudre l'équation $e^{ix} = 1$.
   - 2.2 Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.
   - 2.3 Trouver la forme algébrique de S_n.
   - 2.4 Donner alors les expressions de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 12.

Soit z un nombre complexe de module 1 et différent de 1.
Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 13.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

1. Montrer que $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur si, et seulement si, $z \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, $z \in$ est imaginaire pur.

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Écrire l'expression algébrique de $(e^{ix}+1)^n$, pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} e^{i(a+kb)}$.
3. En déduire l'expression de $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \cos(a+kb)$.

Exercice 15.

À l'aide des formules d'Euler écrire $\sin^3(x)\cos(x)$ en fonction de $\sin(4x)$ et $\sin(2x)$.

Exercice 16.

$\boxed{1.}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(S) : \begin{cases} x+y = -1 \\ xy = 2 \end{cases}$

$\boxed{2.}$ On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

$\boxed{2.1}$ Déterminer la partie imaginaire de u, et montrer qu'il est strictement positive.

$\boxed{2.2}$ Montrer que u et v sont conjugués.

$\boxed{2.3}$ Calculer $u+v$.

$\boxed{2.4}$ Calculer uv

$\boxed{2.5}$ En déduire les valeurs de u et v.

Exercice 17.

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\,\mathrm{Co}\tan(\theta/2)$.

Exercice 18.

Soit z un complexe tel que $z^6 = \overline{z}$.

$\boxed{1.}$ Montrer que $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

$\boxed{2.}$ Déterminer toutes les valeurs possibles de z.