Matrices inversibles et systèmes linéaires

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$.
2. Montrer que si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
3. On suppose que $ad - bc = 0$ et que A est inversible.
   - 3.1 Montrer que $A = (a+d)I_2$.
   - 3.2 Trouver alors une contradiction. Conclusion.

Exercice 2.

Résoudre le système linéaire suivant : $\begin{cases} x+y+z+t+2s &= 2 \\ 2x+y+2z+2t+s &= 0 \end{cases}$

Exercice 3.

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x+2y-z+3t+2s &= 2 \\ 2x-y+z+t+3s &= 0 \\ x+2y+2z-s=1 \end{cases}$

Exercice 4.

Montrer que les matrices suivante sont inversibles et déterminer leurs inverses :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
2. Calculer $B^2 + B$. En déduire que B est inversible, et déterminer B^{-1}.
3. Exprimer C^2 en fonction de C. La matrice C est-elle inversible ?

Exercice 6.

On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, puis déterminer des réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2.
3. Montrer que P est inversible et préciser P^{-1}.
4. Montrer que $AP = PD$, où D est une matrice diagonale a déterminer.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$
6. En déduire l'expression de la matrice A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y + z & = & a \\ x + 2y + z & = & b \\ x + y + 2z & = & c \end{cases}$$

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 8.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
3. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   3.1 Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   3.2 On pose $D = P^{-1}AP$. Déterminer la matrice D, en déduire l'expression de D^n, en fonction de n.
   3.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   3.4 En déduire l'expression de A^n, en fonction de n.
4. En utilisant les résultats précédentes, donner l'expression de u_n en fonction de n.