Espaces vectoriels

Exercice 1.

Pour chacun des ensembles F, déterminer s'il est ou non un sous-espace vectoriel de E

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / x - 2y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 1\}$.
4. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 0\}$.
5. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, x, y)) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$.
6. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / x - y^2 = 0\}$.
7. $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P' = P\}$.

Exercice 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $F := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Même question avec $G := \{M \in \mathcal{M} \ / AM = AM\}$

Exercice 3.

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ X^2 + 1|P\}$. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
3. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}[X] \ / P(0) = P(2) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

On pose $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que les vecteurs $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -2)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs e_1 et e_2.
2. Le vecteur $w = (2, 1, 2)$ est il combinaison linéaire de e_1 et e_2 ?
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \{(x, y, z)\mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\}$.
4. Montrer que la famille (e_1, e_2) est libre.

Exercice 5.

Montrer que la famille $(\cos, \cos^2, \cos^3)$ est libre.

Exercice 6.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que la famille (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 7.

Déterminer une base des sous espaces vectoriels suivants :

1. $F = \{aX^3 + bX + a \in \mathbb{R}[X] \ / a, b \in \mathbb{R}\}$.
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \ / X|P\}$.

Exercice 8.

Soit $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \left\{ \begin{array}{lcl} x + 2y + 2y & = & 0 \\ x + 3y + z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 9.

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $F = \{f \in E \ / f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.
2. Soit $g \in E \setminus F$ et $f \in E \setminus \{0\}$. Montrer que la famille (f, g) est libre.

Exercice 10.

Soit $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Exercice 11.

Soit $e_1 = (1, -1, 2)$, $e_2 = (2, 1, 2)$ et $e_3 = (-3, 0, 4)$.
Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est liée.