Déterminants

Exercice 1.

Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2.

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \ddots & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 3.

Déterminant de **Vandermonde** :

Définition 0.1 *Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, on appelle déterminent de* ***Vandermonde*** *, et on note $V(x_1,\dots,x_n)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :*

$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer que $V(x_1,\dots,x_n)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

Exercice 4.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & w^2 & w \\ w & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}$$

où $w^3=1$

Exercice 5 (Déterminant circulant)**.**

Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A\Omega$ en fonction de ω et $P=\sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$.
2. En déduire que $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$
3. Pour $\alpha\in\mathbb{C}$, on pose

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1}\\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2}\\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \dots & \alpha^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det B = (1-\alpha^n)^{n-1}$.

Exercice 6.

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ antisymétrique.Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible

Exercice 7.

1. Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie.On suppose qu'il existe $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2+id_E=0$.Démontrer que $\dim E$ est paire
2. Donner un exemple de $\mathbb{C}$ ev vectoriel de dimension finie impaire , qui possède un endomorphisme f tel que $f^2+id_E=0$

Exercice 8.

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA=\overline{A}$, montrer que $\det A\in\mathbb{R}$

Exercice 9.

1. Pour $n \geq 1$, on pose

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.1 Calculer Δ_1 et Δ_2

1.2 Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\Delta_{n+2} = \Delta_n$$

1.3 En déduire une expression de Δ_n en fonction de n.

2. Pour $n \geq 1$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.1 Calculer D_1 et D_2.

2.2 Montrer que , pour tout $n \geq 1$, $D_{n+2} = -2D_{n+1} - D_n$

2.3 En déduire une expression de D_n en fonction de n.

Exercice 10.

1. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie. s une symétrie de E
Montrer que $\det s = (-1)^{\dim(\ker(s+id_E))}$ et que
$\operatorname{tr} s = \dim(\ker(s - id_E)) - \dim(\ker(s + id_E))$

2. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$, calculer $\det\phi$

Exercice 11.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tells que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$
Indication : remarquer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$

Exercice 12.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible si, et seulement si, ${}^tA - \lambda I_n$ l'est aussi.

Exercice 13.

Montrer que les famille suivantes sont des bases de E :

1. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$ et $P_3 = (X-1)^2$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $u_= (3,2,4)$, $u_2 = (2,2,0)$ et $u_3 = (6,0,0)$.

Exercice 14.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1,1)$ et $v_4 = (-1,0,0,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$.
3. Déterminer $\det B$, $\det A$ et $\det f$.