Espaces vectoriels cas général

Exercice 1.

Les parties suivantes sont elles des sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 | x - y = y - z + t = 0\}$,
2. $F = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\ ,\ y + z = 0\}$
3. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + y - z = 1\}$
4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid xy = z\}$
5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x = 0\}$
6. $F = \{(x, x + y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}$

Exercice 2.

Les parties suivantes sont-elles des sous espaces vectoriels de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. $F = \{f \in E \,|\, f$ est $\pi -$ périodique $\}$
2. $F = \{f \in E \,|\, f$ est bornée sur $\mathbb{R}\}$
3. $F = \{f \in E \,|\, f(0) = 1\}$
4. $F = \{f \in E \,|\, f(0)f(1) = 0\}$

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{K}_n[X]$.

1. Montrer que la famille $(1, (X - 1), \ldots, (X - 1)^n)$ est une base de E_n.
2. Montrer que $F := \{P \in E \mid (X - 1)^2$ divise $P\}$ est un sous espace vectoriel de E.
3. En déduire que les deux sous espaces vectoriels E_1 et F sont supplementaire dans E.

Exercice 4.

Soit F défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{lcl} x - y & = & 0 \\ z - t & = & 0 \end{array} \right. \}$$

On pose $u = (1, -1, 0, 0)$ et $v = (0, 0, 1, -1)$, et $G = \text{Vect}(u, v)$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une famille génératrice de F (formée par deux vecteurs).
3. Montrer que la somme $F + G$ est directe.
4. Démontrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 5.

On pose $u = (1, 1, -1)$, $v(0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 6.

1. Vérifier que $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Soient F et G définis par :

$$F=\{f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)dt=0\}\ ,\ G=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } [0,1]\}$$

2.1 Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

2.2 Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel et $u_1,\ldots,u_n\in E$. Pour $1\le i\le n$, on pose $v_i=\sum_{k=1}^{i}u_k$. Montrer que si la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre alors $(v_1,\ldots,v_n)$ est libre.

Exercice 8.

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(x-z,2x+y-3z,-y+2z)$, et notons $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique .
3. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 9.

Soit $f:E\to E$ une application linéaire et $\lambda\in\mathbb{K}$. On pose $E_\lambda=\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

1. Montrer que E_λ est un sous espace vectoriel de E.
2. Calculer $f(x)$ pour $x\in E_\lambda$.
3. Montrer que $f(E_\lambda)=E_\lambda$

Exercice 10.

Soit $f:E\to E$ un endomorphisme, on rappelle que f^2 est l'application $f\circ f$.

1. Vérifier que f^2 est linéaire.
2. Montrer que $\ker f\cap\operatorname{Im} f=f(\ker f^2)$

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montre que $\ker f = \ker f^2$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.
2. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si, et seulement si, $\ker f + \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 13.

Soit $\varphi : \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{K}) \to \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = f'$, où $a < b$ sont des réels.

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.
3. L'application φ est-elle injective, surjective ?

Exercice 14.

Soit f un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$, i.e $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Justifier qu'il existe $v \in E$ tel que $f^{p-1}(v) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ est libre.
3. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{p-1})$ est libre.
4. Un exemple d'endomorphisme nilpotent : Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par $f(x,y,z) = (0,x,y)$.
   Calculer f^2 et f^3.

Exercice 15.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(e_1) = (1,1,1,-1)\ ,\ f(e_2) = (-1,0,1,3)\ ,\ f(e_3) = (2,0,-1,1)$$

1. Calculer $f(x,y,z)$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker f$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 16.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ définie par :

$$f(e_1) = 0\ ,\ f(e_2) = e_1\ ,\ f(e_3) = e_1 + e_2$$

1. Calculer $f^2(e_i)$, puis $f^3(e_i)$ pour $1 \le i \le 3$.
2. En déduire que $f^3 = 0$.
3. Une deuxième méthode pour calculer f^3 (calcul explicit) :
   - 3.1 Calculer $f(x, y, z)$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$.
   - 3.2 Calculer $f^2(x, y, z)$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. En déduire que $f^3 = 0$.
4. Soit g , l'endomorphisme $g = f - \mathrm{Id}_E$.
   - 4.1 Montrer que $g^3 + 3g^2 + 3g + \mathrm{Id}_E = 0$
   - 4.2 En déduire que g est un isomorphisme et déterminer g^{-1} en fonction de g.

Exercice 17.

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathscr{P}$ l'ensemble des application paires et $\mathscr{I}$ celui des applications impaires (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$).

1. Vérifier $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous espaces vectoriels de E
2. Montrer que la somme $\mathscr{P} + \mathscr{I}$ est directe.
3. Soit $f \in E$, on pose $f_{\mathscr{P}}(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_{\mathscr{I}}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
   - 3.1 Montrer que $f_{\mathscr{P}} \in \mathscr{P}$ et $f_{\mathscr{I}} \in \mathscr{I}$.
   - 3.2 Calculer $f_{\mathscr{P}} + f_{\mathscr{I}}$.
4. En déduire que $E = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.
5. Pour $f \in E$, déterminer $p_{\mathscr{P},\mathscr{I}}(f)$ la projection de f sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$, et $p_{\mathscr{I},\mathscr{P}}(f)$ la projection de f sur $\mathscr{I}$ parallèlement à $\mathscr{P}$.
6. Exemple : Déterminer $p_{\mathscr{P},\mathscr{I}}(\exp)$ et $p_{\mathscr{I},\mathscr{P}}(\exp)$.

Exercice 18.

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p + q$ est un projecteur alors

$$\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$$