Ensembles applications et relations

Exercice 1

Exprimer à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis donner leurs négations :

1. Tout nombre réel est positif.
2. Le module de tout nombre complexe est un entier.
3. Tout nombre complexe possède une racine carrée.
4. Entre deux nombres réels distincts, il existe un nombre rationnel.
   Dans la suite I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I:
5. f n'est pas la fonction nulle.
6. f s'annule sur I.
7. f est croissante sur I.
8. f n'est pas bornée.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Écrire la négation de l'assertion suivante:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,;\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exercice 3

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (\forall \varepsilon > 0\quad |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
Comparer avec l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ (|x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0)$.

Exercice 4

Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5

Démontrer que pour toutes parties A, B et C d'un même ensemble E:

1. $A \backslash B = C_E^B \backslash C_E^A$.
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
3. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Exercice 6

Soit $E = \{0, 1\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :
$0 \in E$, $\{0\} \in E$, $\{\emptyset\} \subseteq E$, $\{1\} \subseteq E$, $\{0, \emptyset\} \subseteq E$, $\{\{0\}, 1\} \subseteq E$.

Exercice 7

Soit x un objet, décrire les ensembles : $\mathscr{P}(\{x\})$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x\}))$.

Exercice 8

Soit E un ensemble. A , B et C des parties de E telles que :
$A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$
Montrer que $A = B = C$

Exercice 9

Soit E un ensemble. A , B et C des parties de E. Montrer que

1. $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$.
2. $\begin{cases} A \cap B \subseteq A \cap C \\ A \cup B \subseteq A \cup C \end{cases} \Rightarrow B \subseteq C$
3. $(B \backslash C \subset A \text{ et } C \backslash D \subseteq A) \Rightarrow B \backslash D \subseteq A$

Exercice 10

Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E. Démontrer que

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$$

Exercice 11

Parmi les applications suivantes, déterminer les injections, les surjections et les bijections:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$
3. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$
4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$.
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n/2$ si n est pair et $f(n) = \dfrac{n-1}{2}$ si n est impair

Exercice 12 (Fonction indicatrice)

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E on note φ_A l'application de $E \to \{0,1\}$ définie par $\varphi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. Montrer que

1. $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$
2. $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \varphi_B$
3. $\varphi_{\overline{A}} = 1 - \varphi_A$
4. $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_{A\cap B}$
5. $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A(1 - \varphi_B)$
6. En déduire que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
7. **Application:** Résolution de l'équation $A\Delta X = B$:
   - 7.1 Calculer $A\Delta A$.
   - 7.2 Résoudre l'équation $A\Delta X = B$ d'inconnu X.

Exercice 13

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective

Exercice 14

Soit E un ensemble, et $f : E \to E$ une application vérifiant: $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est bijective. Que vaut f^{-1}?

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([-1,2])$, $f^{f([-1,2])}$, et $f(f^{-1}([-1,2]))$.

Exercice 16

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f est surjective si, et seulement si, pour toute partie $A \subseteq F$, $A \subseteq f(E)$.
2. Montrer que $f(f^{-1}(A)) = A \Leftrightarrow A \subseteq f(E)$
3. En déduire que f est surjective si, et seulement si, $\forall A \subseteq F$, $f(f^{-1}(A)) = A$

Exercice 17

Soit $f : E \to E$ une application, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois) et $f^0 = \mathrm{Id}_E$
Pour $A \subseteq E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

1. Montrer que $f(B) \subseteq B$
2. Monter que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A

Exercice 18

Sur $\mathbb{C}$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par:pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence du nombre complexe z.

Exercice 19

Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Déterminer pour $\mathcal{R}$ la classe de 0.

Exercice 20

Soit E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E , $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tel que } x, y \in A_i$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Déterminer la classe d'équivalence de $x \in E$

Exercice 21

Soit E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation réflexive dans E telle que

$$\forall (x, y, z) \in E^3 ,\ \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow z\mathcal{R}x$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

Exercice 22

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application injective.
Montrer que la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

est une relation d'ordre. Est-elle total ?

Exercice 23

Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet relation est-elle total?
2. Déterminer l'ensemble des majorant du couple (x, y) pour la relation $\mathcal{R}$

Récurrence:

Exercice 24

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 25

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 26

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante

$$\mathcal{P}(n) :\ 2^n > n^2$$

1. Montrer que $\forall n \geq 3$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$
2. Pour quelles valeurs de n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie?

Exercice 27

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 28

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (Formule de binôme de Newton)

Exercice 29

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = nf(1)$.
4. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{Z}$; $f(n) = nf(1)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$; $f(x) = xf(1)$.

Exercice 30

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f \circ \big(f(n)\big) < f(n+1)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq n, n \leq f(x)$.
   Ind: par récurrence sur n
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \{f(x) \ / \ n \leq x\}$.
   - 2.1 Montrer que A admet un plus petit élément.
   - 2.2 Soit $a \geq n$ tel que $f(a) = \min A$. Montrer que $a = n$
     Ind: par l'absurde.