Sommes et Produits

Exercice 1

1. Calculer la somme suivante:

$$S_n = \sum_{1\le i\le j\le n} \max(i,j)$$

2. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$

Exercice 2

Simplifier le produit suivant:

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 3

1. Calculer le produit suivant:

$$P_n = \prod_{1\le i,j\le n} ij$$

2. En déduire le produit

$$Q_n = \prod_{1\le i\neq j\le n} ij$$

Exercice 4

Calculer la somme suivante:

$$S_n = \sum_{1\le i\le j\le n} 1$$

Exercice 5

1. Calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{1\le i,j\le n} ij$$

2. En déduire la somme suivante:

$$T_n = \sum_{1\le i<j\le n} ij$$

Exercice 6

1. Montrer que $\sum_{1\le i\le j\le n} 2^j = \sum_{j=1}^{n} j2^j$.

2. En déduire une expression simple de $\sum_{j=1}^{n} j2^j$.

Exercice 7

Soient $(x_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites, on définit deux suites $(X_n)_n$ et $(y_n)_n$ de la manière suivante:
$X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et $y_n = Y_{n+1} - Y_n$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} x_k Y_k = X_n Y_n - \sum_{k=0}^{n-1} X_k y_k$.

2. Application: Calculer $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 8

1. Soit z un nombre complexe.

   1.1 Donner une condition nécessaire et suffisante, pour que z soit réel.

   1.2 Si z non nul. Justifier que $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$.

2. Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls de même module r. On pose $A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{z_k}{z_l}$

   2.1 Montrer que A est un nombre réel.

   2.2 Montrer que $A = \frac{1}{r^2} |\sum_{k=1}^{n} z_k|^2$.

   2.3 En déduire que $A = 0$ si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.

   2.4 Si $z_1, \ldots, z_n$ sont de module 1 montrer que $A \leq n^2$.

Exercice 9

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Simplifier le produit suivant: $\prod_{k=1}^{n} 3^{\frac{1}{k(k+1)}}$