Systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre le système linéaire suivant: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 2\\ x_1+2x_2+2x_3+2x_5 &= 0\\ x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5 &= 1\\ x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5 &= 2\end{cases}$

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires suivants:

1. $\begin{cases} 2x+y-2z &= 3\\ x+3y+2z &= 2\end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z+t &= 0\\ 2x+y+2z+3t &= 2\\ 3x+3y+z+t &= 4\end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y-2z+t &= \alpha\\ x+2y+3t &= 2\alpha\\ x-2y-z &= 2\\ x+2z-t &= \alpha+2\end{cases}$
   avec $\alpha\in\mathbb{R}$

Exercice 3

On considère le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x+2y-3z &= a\\ 2x+6y-11z &= b\\ x-2y+7z &= c\end{cases}$$

où a,b et $c\in\mathbb{R}$.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système ait au moins une solution?

2. Est-ce que ce système peut avoir une unique solution?

Exercice 4

Résoudre le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} xyz &= 2\\ \frac{xz}{y} &= 1\\ \frac{x^2}{yz^3} &= 4\end{cases}$$

Où x, y et z sont des réels strictement positifs.

Exercice 5

Soit α un paramètre réel. On considère le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x-y-z+\alpha t &= 1\\ x+\alpha y-z-t &= -\alpha\\ \alpha x+y+z+t &= -1\\ x-y+\alpha z-t &= -\alpha\end{cases}$$

1. Échelonner ce système, pour quelle valeur de α ce système admet-il une unique solution? Calculer cette solution en fonction de α dans ce cas.

2. Sinon, vérifier si le système est compatible ou non et, dans l'affirmative , donner l'ensemble de ses solutions.

Exercice 6

Soit (T) un système linéaire à p inconnus et n équations, et notons (T_0) le système linéaire homogène associé à (T).
Pour $x=(x_1,\dots,x_p)$, $y=(y_1,\dots,y_p)\in\mathbb{K}^p$, on note $x+y$ (resp. $x-y$) l'élément de $\mathbb{K}^d$ définie par $x+y:=(x_1+y_1,\dots,x_p+y_p)$ (resp. $x-y:=(x_1-y_1,\dots,x_p-y_p)$).
On suppose que (T) admet une solution particulière $X_0\in\mathbb{K}^p$.

1. Montrer que $Y\in\mathbb{K}^p$ est solution de (T) si, et seulement si, $Y-X_0$ est solution de (T_0).

2. En déduire que $s(T)=X_0+s(T_0)$ où $X_0+s(T_0):=\{X_0+X\ ,\ X\in s(T_0)\}$.