Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et R le reste de la division euclidienne de P par X^2+1.

1. Montrer que $P(i) = R(i)$.
2. En déduire que X^2+1 divise P si, et seulement si, i est une racine de P.
3. Pour quel valeur de n le polynôme X^n+1 est-il multiple de X^2+1.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq b$.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est $p(a)$.
2. Exprimer le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
3. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par A dans les cas suivant:
   - 4.1 $P = X^5+X+1$ et $A = X^2-3X+2$.
   - 4.2 $P = nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $A = (X-1)^2$.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et P le polynôme $(\sin(\theta)X+\cos(\theta))^n$ déterminer le reste de la division euclidienne de P par X^2+1.

Exercice 4

Déterminer (lorsqu'ils existent) tous les polynômes P tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $P(n) = n^3-2n$.
2. $P(n) = n^n$.
3. $P(n) = \sqrt{n}$

Exercice 5

Trouver tout les polynômes P tels que $P(1) = 2$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 3$ et pour tout $n \geq 3$, $P^{(n)}(1) = 0$.

Exercice 6

Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$

Exercice 7

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes

1. $X^4-2\cos\theta X^2+1$.
2. X^5+X^3+X
3. $(1-X^2)^3+8X^3$.
4. X^4+X^2+1.
5. X^4-1.
6. X^5-1.
7. $(X^2-X+1)^2+1$.

Exercice 8

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme
$(X+i)^n-(X-i)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9

Déterminer $\lambda > 0$,pour que le polynôme $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait une racine double. Quelle est alors l'autre racine?

Exercice 10

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}$, montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 11

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n+1$ possédant $n+1$ racines réelles distinctes.

1. Montrer que son polynôme dérivé P', possède n racines réelles distinctes.
2. En déduire que les racines de P^2+1 sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, et Q le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k} X^k$.

1. Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, on a $Q(z) = z^n \overline{P(z)}$. On suppose de plus que pour tout nombre complexe z de module 1; on a $|P(z)| = 1$.
2. Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, on a $Q(z)P(z) = z^n$.
3. En déduire l'ensemble des polynômes P tels que $P(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

Exercice 13 (Polynômes d'interpolation de Lagrange 1736 – 1813)

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on pose:

$$L_i = \prod_{0 \le j \le n, j \ne i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1. Quel est le degré de L_i?
2. Que vaut $L_i(x_i)$?
3. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ avec $k \ne i$, vérifier que $L_i(a_k) = 0$.
4. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On pose $Q = P - \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.
   - 4.1 Montrer que que $0 \le \forall k \le n$, $Q(a_k) = 0$.
   - 4.2 En déduire que $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$
5. Soient $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \ , \ P(a_i) = y_i$$

Exercice 14

Soit P le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer les racines de P.
2. En déduire la factorisation de P.
3. On pose $F = \dfrac{X+1}{P}$
   - 3.1 Écrire, en justifiant, la forme de la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
   - 3.2 Donner alors la décomposition de F en éléments simples.

Exercice 15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, de degré $n \ge 1$, scindé à racines simples i.e P est de la forme

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$$

où les z_k, sont les racines deux à deux distinctes de P. On pose $F = \dfrac{P'}{P}$.

1. Déterminer le degré de F.

2. Quels sont les pôles de F?

3. Justifier que F peut s'écrire sous la forme $F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - z_k}$, où les λ_k sont dans $\mathbb{K}$.

4. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ fixé.

   4.1 Justifier que $P'(z_i) \neq 0$.

   4.2 Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - z_i)Q$.

   4.3 Montrer que $P'(z_i) = Q(z_i)$.

   4.4 En déduire que $\lambda_i = 1$.

Exercice 16

Soient a, b et c les racines de $P = X^3 - 3X - 1$.

1. Calculer $R = a^2 + b^2 + c^2$, $S = a^3 + b^3 + c^3$ et $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

2. Calculer $U = \frac{1}{(a^3-1)^2} + \frac{1}{(b^3-1)^2} + \frac{1}{(c^3-1)^2}$.

Exercice 17

Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ des fractions rationnelles suivantes:

1. $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.

2. $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

3. $\frac{1}{X(X-1)^2}$.

4. $\frac{1}{X^4+X^2+1}$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, former la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(x-n)}$$

Exercice 19

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$

Exercice 20

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ $(n \geq 2)$ ayant n racines distincts , $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1. Décomposer $\frac{1}{P}$ en éléments simples.

2. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0$.

Exercice 21

Soit la fraction $F = \frac{1}{X(X+1)}$

1. Réaliser la décomposition de F en éléments simples.

2. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.