Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts ($n \geq 1$). Notons $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ ($e_0 = (1, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, \dots, 0), \dots$).
On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$.

1. Justifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker \varphi$, en déduire que φ est un isomorphisme.
3. Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\varphi(L_i) = e_i$. On déterminera une expression de L_i.
   Les L_i s'appellent les polynôme de Lagrange.
4. Justifier que $L := (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
5. Calculer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base L.

Exercice 2

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, pour $1 \leq i \leq n$, on note v_i le vecteur $v_i = (\lambda_1^{i-1}, \dots, \lambda_n^{i-1})$ élément de $\mathbb{K}^n$.
Montrer que la famille $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 3

Soit E un ev de dimension n. F et G deux sev de E. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G \neq \{0\}$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, z - y, x - y)$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$
2. Déterminer une base du $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Vérifier que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ne forme pas une somme directe.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $((X - a)^i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Donner les composantes de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 6

Soit E en ev de dimension finie, f et g deux endomorphisme de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 7

Soit E un ev de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :
$K_n = \ker f^n$ et $I_n = \operatorname{Im} f^n$

1. Montrer que la suite $(K_n)_n$ est croissante et que $(I_n)_n$ est décroissante au sens de l'inclusion.
2. Montrer que ces deux suites sont stationnaires et que si $p = \min\{i / \ K_i = K_{i+1}\}$ alors $p = \min\{i / \ I_i = I_{i+1}\}$
3. Montrer que $E = K_p \oplus I_p$
4. Montrer que $f(I_p) \subseteq I_p$, et que l'endomorphisme induit par f sur I_p est un automorphisme.

Exercice 8

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que
$f^3 = -f$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 9

Soit E un ev de dimension n. Soient f ,$g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g$ est injectif et $\operatorname{Im} g \subset \ker f$

1. Montrer que $rg(f) + rg(g) = n$

2. En déduire que $\ker f = \operatorname{Im} g$

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension n. Montrer que E est de dimension $2n$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Exercice 11

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $f^n = 0$

Exercice 12

Soit E un ev de dimension finie.
Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker f = \operatorname{Im} f$ si, et seulement si, E est de dimension paire.

Exercice 13

Soit E un ev de dimension finie n et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

2. Montrer que $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ Montrer que $rg(f) + rg(g) = rg(f+g)$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$

Exercice 15

Soit E un ev de dimension n ,et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E

2. On pose $H = \{g \in \mathscr{L}(E)\ ,\ \ gf = fg\}$

   2.1 Montrer que H est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$

   2.2 Montrer que $\dim H = n$.
   Ind: Montrer que $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de H

Exercice 16

Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Montrer qu'ils existent $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que pour tour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$.

Exercice 17

Soit E un ev de dimension $n \geq 2$.Montrer que l'intersection de deux hyperplans distincts de E est un sev de dimension $n-2$

Exercice 18

Soient E un ev de dimension finie, f et g deux formes linéaires non nulles sur E.
Montrer que $\ker f = \ker g$ si, et seulement si, la famille (f, g) est liée.

Exercice 19

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \geq 1$ et F un sev de E distinct de E de dimension d.
Montrer que F est l'intersection de $n-d$ hyperplans de E

Exercice 20

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ Montrer que :

$$\ker f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } \dim E = 2rg(f)$$

Exercice 21

Soient E un $\mathbb{K}$ ev , F un sev de E et $f \in \mathscr{L}(E)$

1. Montrer que si $F \subset f(F)$ et F de dimension finie alors $f(F) = F$
2. Le résultat reste t-il vrai si F n'est pas de dimension finie?

Exercice 22

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de non nul de E.

1. Quelles sont les valeurs possibles du rang de f?
2. On suppose dans cette question que $f^2 = 0$, déterminer le rang f.
3. On suppose dans cette question que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer le rang de f.

Exercice 23

Soit un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Im} f$ soit une droite vectorielle de E et $f^2 \neq 0$.

1. Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$
2. En déduire que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 24

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Soit $f : F \times G \to E$ l'application définie par $f(x, y) = x + y$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Quelle est l'image de f.
3. Montrer que la somme $F + G$ est directe si, et seulement si, f est injective.
4. Montrer que $\ker f = \{(x, -x) \in F \times G \,/\, x \in F \cap G\}$.
5. Montrer que $\ker f$ et $F \cap G$ sont isomorphes.
6. En déduire la formule de Grassmann.

Exercice 25

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un sendomorphisme de E. Soit F un sous espace vectoriel de E et u' la restriction de u à F.

1. Montrer que $\ker u' = F \cap \ker u$.
2. Montrer que $\dim(u(F)) = \dim F$ si, et seulement si, $F \cap \ker u = \{0\}$.

Exercice 26

Soient f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. On note v la restriction de g sur $\operatorname{Im} f$.

1. Vérifier que $\ker v = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.
2. Donner l'image de v.
3. En déduire que $\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker g + \dim \ker f$.