# Matrices

## Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$.

2. Montrer que $A$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

## Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A$ la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2$.

2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n$.

## Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$.

2. En déduire que $M$ est inversible et déterminer $M^{-1}$.

## Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$.

2. Montrer que $A$ est inversible et exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A^2$, $A$ et $I_3$.

## Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ AM = MA\}$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Dans cette question $n = 2$. Montrer que $\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(I_2)$. (Ind: utiliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.)

## Exercice 6

Vérifier que chacune de ces applications est linéaire de $E$ dans $F$, et donner les matrices associées relativement aux bases canoniques de $E$ et $F$:

1. $f(x,y,z) = (2x+z, x+2y-z, z, 3y-4z)$ , $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^4$

2. $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$ , $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^3$

3. $f(A) = {}^tA$ , $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4. $f(x,y,z,t) = (x+2y, z-t, x+2t)$ , $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^3$

## Exercice 7

Déterminer les applications linéaires $f$ et $g$ canoniquement associées aux matrices $A$ et $B$ respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de $g \circ f$ et de $f \circ g$ relativement aux bases canoniques.

## Exercice 8

On note $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à $A$.

1. Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
   Pour chacune de ces valeurs déterminer un vecteur $X$ tel que $AX = \lambda X$ et dont la deuxième composante vaut 1.
2. On pose $e_1 = (3,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$.
   Montrer que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice $B$ de $f$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$.
4. Donner la matrice de passage $P$ de la base canonique à la base $(e_1, e_2, e_3)$, exprimer une relation entre $A$,$B$ et $P$.
5. Calculer $B^n$, puis $A^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

## Exercice 9

1. Soit $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   et $B = A - 2I_3$
   - 1.1 Calculer, $B^2$, $B^3$, en déduire $B^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   - 1.2 Calculer $A^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites de nombres réels telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 2w_n \end{cases}$$
   Donner l'expression de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$, $u_0$, $v_0$ et $w_0$.

## Exercice 10

Calculer le rang des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Où $x$, $y$ et $z \in \mathbb{R}$.

## Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(A - 6I_3)(A^2 - 3I_3) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^n = P_n(A)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n$ en fonction de $n$, et en déduire une expression de $A$ en fonction de $n$.

## Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tXX = 0$, montrer que $X = 0$.
2. Montrer que $\ker A = \ker {}^tAA$.
3. En déduire que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA$

## Exercice 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

Notons $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ la `trace` de $A$.

1. Montrer qu'ils existent deux vecteurs colonnes $U$ et $V$ telle que $A = U\,{}^tV$.

2. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = {}^t VU$.

3. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

4. Soit $F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \;/\; AX = Tr(A)X\}$ et $G = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \;/\; AX = 0\}$.

   4.1 Justifier que $F$ et $G$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

   4.2 Donner la dimension de $G$.

   4.3 Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $F \cap G = \{0\}$ et que $F$ est une droite vectoriel, et montrer dans ce cas que la matrice $A$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{tr}\, A \end{pmatrix}$

## Exercice 14

Soit $E)\mathbb{K}_n[X]$, et $f$ l'endomorphisme de $E$ définie pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ par $f(P) = P(X+1)$.

1. Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$.

2. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique. On note $A$ cette matrice.

3. Justifier que $A$ est inversible, et donner son inverse.

## Exercice 15

Calculer le rang de la matrice suivante: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2n-1 \\ n & n+1 & \dots & 2n \end{pmatrix}$

## Exercice 16

Les matrices suivantes sont-elles inversibles?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 17 ( Matrice de rotation hyperbolique)

Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $r_t$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t \\ 0 & \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \end{pmatrix}$, une telle application s'appelle une **rotation hyperbolique**.

1. Déterminer l'endomorphisme $r_0$.

2. Calculer $R_t R_{-t}$, et en déduire que $r_t$ est un automorphisme.

3. Montrer que la composée de deux rotations hyperboliques est une rotation hyperbolique.

4. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$ **hyperboloïde a deux nappes**. Montrer que $r_t(H) = H$.

## Exercice 18

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables.

1. Montrer que $A$ est inversible si, et seulement si, $B$ l'est.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k$ et $B^k$ sont semblables.

3. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.
   ☞ Si $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ est la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_d A^d$.

**Exercice 19**

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - 3.1 Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
   - 3.2 On pose $D = P^{-1}AP$. Déterminer la matrice $D$, en déduire l'expression de $D^n$, en fonction de $n$.
   - 3.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   - 3.4 En déduire l'expression de $A^n$, en fonction de $n$.
4. En utilisant les résultats précédentes, donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 20**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n$, $p$ un projecteur de $E$. Montrer que $rg(p) = \mathrm{tr}(p)$ .
On pourra utiliser une base adaptée à la décomposition $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$

**Exercice 21**

On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2$, puis déterminer des réels $a$ et $b$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. En déduire que $A$ est inversible et exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A$ et $I_2$.
3. Montrer que $P$ est inversible et préciser $P^{-1}$.
4. Montrer que $AP = PD$, où $D$ est une matrice diagonale a déterminer.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$
6. En déduire l'expression de la matrice $A^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 22**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$.
2. Montrer que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $V$ un vecteur collone non nul tel que $AV = \lambda V$.
   - 3.1 Calculer $B^2V$ en fonction de $\lambda$ et $V$.
   - 3.2 Montrer que $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$