Ensembles applications et relations

Exercice 1.

Exprimer à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis donner leurs négations :

1. Tout nombre réel est positif.
2. Le module de tout nombre complexe est un entier.
3. Tout nombre complexe possède une racine carrée.
4. Entre deux nombres réels distincts, il existe un nombre rationnel.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Écrire la négation de l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists \eta > 0 \;,\; \forall x \in \mathbb{R} \;;\; |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exercice 3.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \;,\; (\forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$$

Comparer avec l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R} \;,\; \forall \varepsilon > 0 \quad (|x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0)$$

Exercice 4.

Démontrer que pour toutes parties A, B et C d'un même ensemble E :

1. $A \backslash B = C_E^B \backslash C_E^A$.
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
3. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Exercice 5.

Soit $E = \{0, 1\}$
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :
$0 \in E$, $\{0\} \in E$, $\{\emptyset\} \subset E$, $\{1\} \subset E$, $\{0, \emptyset\} \subset E$, $\{\{0\}, 1\} \subseteq E$.

Exercice 6.

Soit x un objet, décrire les ensembles
$\mathscr{P}(\{x\})$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x\}))$

Exercice 7.

Soit E un ensemble.
A , B et C des parties de E telles que :
$A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$
Montrer que $A = B = C$

Exercice 8.

Soit E un ensemble. A , B et C des parties de E. Montrer que

1. $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$
2. $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$
3. $(B \backslash C \subset A$ et $C \backslash D \subset A) \Rightarrow B \backslash D \subset A$

Exercice 9.

Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E. Démontrer que

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$$

Exercice 10.

Parmi les applications suivantes, déterminer les injections, les surjections et les bijections :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$
3. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$
4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$.
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n/2$ si n est pair et $f(n) =$

Exercice 11 (Fonction indicatrice)**.**

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E on note φ_A l'application de $E \to \{0,1\}$ définie par $\varphi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. Montrer que

1. $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$
2. $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \varphi_B$
3. $\varphi_{\overline{A}} = 1 - \varphi_A$
4. $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_{A\cap B}$
5. $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A(1-\varphi_B)$
6. En déduire que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
7. **Application :** Résolution de l'équation $A\Delta X = B$:
   - 7.1 Calculer $A\Delta A$.
   - 7.2 Résoudre l'équation $A\Delta X = B$ d'inconnu X.

Exercice 12.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

1. Si $g\circ f$ est injective alors f est injective
2. Si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective

Exercice 13.

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f est surjective si, et seulement si, pour toute partie $A \subset F$, $A \subset f(E)$.
2. Montrer que $f(f^{-1}(A)) = A \Leftrightarrow A \subset f(E)$
3. En déduire que f est surjective si, et seulement si, $\forall A \subset F$, $f(f^{-1}(A)) = A$

Exercice 14.

Soit $f : E \to E$ une application, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f^n = f\circ f\circ\ldots\circ f$ (n fois) et $f^0 = id_E$
Pour $A \subset E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

1. Montrer que $f(B) \subset B$
2. Monter que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A

Exercice 15 (Point fixe)**.**

Soit E un ensemble non vide et $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ une application vérifiant : $\forall X, Y \in \mathscr{P}(E)\ ,\ X \subseteq Y \Rightarrow \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$.

1. Soit $S = \{X \in \mathscr{P}(E)\ ,\ \varphi(X) \subseteq X\}$. Montrer que S est non vide.
2. On pose $A = \bigcap_{X \in S} X$. Montrer que $\varphi(A) = A$.

Exercice 16.

Sur $\mathbb{C}$, on considère la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par :pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$

$$z \mathscr{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence du nombre complexe z.

Exercice 17.

Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par :

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence
2. Déterminer pour $\mathscr{R}$ la classe de $x \in \mathbb{R}$

Exercice 18.

Soit E un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E , $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tel que } \ x, y \in A_i$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence
2. Déterminer la classe d'équivalence de $x \in E$

Exercice 19.

Soit E un ensemble, $\mathscr{R}$ une relation réflexive dans E telle que

$$\forall (x, y, z) \in E^3\ ,\ (\begin{cases} x \mathscr{R} y \\ y \mathscr{R} z \end{cases}) \Rightarrow z \mathscr{R} x$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application injective.
Montrer que la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

est une relation d'ordre. Est-elle total ?

Exercice 21.

Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la relation binaire $\mathscr{R}$ par :

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. Cet relation est-elle total ?
2. Déterminer l'ensemble des majorant du couple (x, y) pour la relation $\mathscr{R}$

Récurrence

Exercice 22.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q + 1)$.

Exercice 23.

1. Montrer, pour tout réel $x > 0$, que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n \in]0, +\infty[$.
   Montrer que $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_{n-1}} + \dots + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n$.

Exercice 24.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante

$$\mathscr{P}(n) : \ 2^n > n^2$$

1. Montrer que $\forall n \geq 3$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n + 1)$
2. Pour quelles valeurs de n , $\mathscr{P}(n)$ est vraie ?

Exercice 25.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 26.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Exercice 27.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que, $f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = nf(1)$.
4. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{Z}$; $f(n) = nf(1)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$; $f(x) = xf(1)$.

Exercice 28.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$(f \circ f)(n) < f(n+1)$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq n$, $n \leq f(x)$.
   Ind : par récurrence sur n
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \{f(x) \ / \ n \leq x\}$.
   - 2.1 Montrer que A admet un plus petit élément
   - 2.2 Soit $a \geq n$ tel que $f(a) = \min A$. Montrer que $a = n$
     Ind : par l'absurde