Équations différentielles

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+t^2)y'+ty=1$.
2. $y'+y=e^t$.
3. $y'+e^{it}y=0$.
4. $(2+\cos(t))y'-\sin(t)y=\cos(t)$.
5. $y'+|t|y=0$.
6. $(t^2-1)y'+y=0$ sur $]1,+\infty[$
7. $y'+\tan(t)y=\sin(2t)$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
8. $y'-y=\cos(t)$.
9. $y'+\tanh(t)y=\mathrm{sh}(t)$.
10. $y'+y=\arctan(e^t)$.

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

On considère l'équations différentielle suivante :

$$(E):\ \ y'+\frac{\sin(t)}{2-\cos(t)}y=2\sin(t)$$

1. Déterminer une solution de E sous la forme $t\mapsto \alpha\cos(t)+\beta$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) (homogène associée à E).
3. En déduire les solutions de E.

Une équation différentielle d'ordre 1 :

On cherche a déterminer toutes les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ varifiants :

$$(\star)\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ \ f'(x)=f(-x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'-iy=0$.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction.
3. Montrer que f s'écrit d'une manière unique sous la forme $f=g+h$ avec g paire et h impaire.
4. Soit f une fonction vérifiant $(\star)$. La fonction f s'écrit sous la forme $f=g+h$ où g est une fonction paire et h impaire.
   - 4.1 Vérifier que les deux fonctions g et h sont dérivables.
   - 4.2 Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-h(x)$ et $h'(x)=g(x)$.
     On pose $K(x)=g(x)+ih(x)$.
   - 4.3 Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\overline{K(-x)}=K(x)$.
   - 4.4 Montrer que $K'-iK=0$.
   - 4.5 En déduire une expression de f.

Un système différentielle :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables vérifiants :

$$\begin{cases} f'(t) &= -g(t)+\sin(\alpha t)\\ g'(t) &= f(t)-\cos(\alpha t)\end{cases}$$

1. On pose $z(t) = f(t) + ig(t)$. Exprimer z' en fonction de z.
2. déterminer les fonctions f et g.

Une équation différentielle :

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - \ln(t)y = t^t$$

Ordre 2 via ordre 1 :

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' = 0$$

Form générale d'une solution :

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur un intervalle I.
Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + ay = b$$

On exprimera les solutions à l'aide des intégrales.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :
A) Dans cette partie donner les solutions à valeurs complexes :

1. $y'' - 2y' + 5y = t^4 e^t$
2. $y'' + 4y' - 5y = (t^2+1)e^t$
3. $y'' - 2y' + y = t^2 e^t$

B) Dans cette parties donner les solutions à valeurs réelles :

1. $y'' + y' + y = t^2 e^{2t}$
2. $y'' + 4y' - 5y = (t^2+1)e^t$
3. $y'' - 2y' + y = t^3 e^t$
4. $y'' + 2y' + y = t\sin(t)$

Quelques exemples d'équations différentielles :

1. On considère l'équation différentielle : (E) $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$
   - 1.1 On pose $y(x) = z(\arctan(x))$.
     Transformer (E) en une équation différentielle à coefficients constants.
   - 1.2 Résoudre (E)
2. On considère l'équation différentielle suivante : (E) $(1-t^2)y'' - ty' - y = 0$
   - 2.1 Vérifier que $z(t) = e^{\arcsin(t)}$ définit une solution de (E) sur $]-1,1[$
   - 2.2 On pose $y(t) = x(t)z(t)$ sur $]-1,1[$, trouver l'équation différentielle que doit vérifier x sur $]-1,1[$ pour que y soit solution de (E) sur $]-1,1[$
   - 2.3 Résoudre (E) sur $]-1,1[$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + y(-t) = \mathrm{ch}(t) + \sin(t)$$

Ind : écrire y comme somme d'une fonction paire et une fonction impaire

Problème des raccords :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $t^2 y' + y = 1$
2. $t y' + 2y = \frac{t}{1+t^2}$
3. $(t^2 - 1) y' - 4ty = 1$
4. $|t| y' + (t-1) y = t^2$

Équations différentielles non linéaires :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 1 + y^2$
2. $y' = e^{x-y}$.
3. $y' = \mathrm{ch}(y)$

Méthode de variation des constantes de Lagrange :

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = c$ et (E_0) l'équation différentielle homogène associée, où $a, b \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$.

La méthode :

Connaissant la solution générale $y = \lambda y_1 + \beta y_2$ de (E_0), on peut trouver une solution particulière de (E) sous la forme

$t \mapsto \lambda(t) y_1(t) + \beta(t) y_2(t)$ *où $\lambda, \beta \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ déterminées par le système* $\begin{cases} \lambda' y_1 + \beta' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \beta' y_2' = c \end{cases}$.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}$.
2. $y'' + y = \tan t$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $y'' + y = f$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.(*on exprimera la solution à l'aide d'une intégrale.*)