Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$.
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de $E \iff F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $\ker u = \operatorname{Im} u$.

1. Montrer que n est pair.
2. Soit $p = \dim \ker u$. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une base de $\ker u$.
   - 2.1 Montrer que pour tout $1 \le i \le p$, il existe $e_i \in E$ tel que $v_i = u(e_i)$.
   - 2.2 Montrer que $(v_1, \dots, v_p, e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u^2 + 2u$.

1. Montrer que la somme $\ker u + \ker(u + \mathrm{Id}_E) + \ker(u - 2\,\mathrm{Id}_E)$ est directe.
2. Vérifier que $-\frac{1}{2}(X+1)(X-2) + \frac{1}{3}X(X-2) + \frac{1}{6}X(X+1) = 1$.
3. Soit $x \in E$. Montrer que $((u + \mathrm{Id}_E)(u - 2\,\mathrm{Id}_E))(x) \in \ker u$, $(u(u - 2\,\mathrm{Id}_E))(x) \in \ker(u + \mathrm{Id}_E)$ et $(u(u + \mathrm{Id}_E))(x) \in \ker(u - 2\,\mathrm{Id}_E)$.
4. En déduire que $E = \ker u \oplus \ker(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{Id}_E)$

Exercice 4

Soit E un K espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts. Pour $1 \le i \le n$, F_i désigne le sous espace vectoriel $F_i := \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. Montrer que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et u l'endomrphisme canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que le sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(1, 1, 1)$ est stable par u.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel , u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(u)$ et v commutent, puis que $P(u)$ et $Q(v)$ commutent.
2. En déduire que $\ker(Q(v))$ est stable par u et $P(u)$.

Exercice 7

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie. En utilisant une base adaptée à la somme $\operatorname{Im} p \oplus \ker p$, montrer que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg} p$.

Exercice 8

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 9

Soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux matrices colonnes non nulles et $A = X^t Y$.

1. Calculer le rang de A.

2. Déterminer $\det(A - \lambda I_n)$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Ind: On pourra distinguer les deux cas $\operatorname{Im} A \subseteq \ker A$ et ....

Exercice 10

Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 11

Montrer que $\{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P'(0) + P(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 12

Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \operatorname{tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 13 (Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application φ_A définie par $\varphi_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \sum\limits_{1 \le i, j \le n} a_{ji} b_{ij}$ où a_{ij} (resp. b_{ij}) est le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A (resp. B).

3. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\varphi = \varphi_A$ i.e pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 14

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ c'est-à-dire il existe une matrice $P \in GL_(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

1. Montrer qu'il existe deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P = M + iN$.

2. Montrer que $AM = MB$ et $AN = NB$.

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \det(M + zN)$, et on *admet que f est un polynôme en z.*

3. Vérifier que f est non nulle. Ind: calculer $f(i)$...

4. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) \neq 0$.

5. Déduire de ce qui précède que les deux matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que les deux matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Exercice 16

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer en fonction de λ le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.

2. Déterminer les valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

3. Trouver un vecteur non nul e tel que $u(v) = 3v$.
   Soit $D = \operatorname{Vect}(e)$ et $H = \operatorname{Vect}((1, -3, 0), (0, 1, -1))$.

4. Montrer que H et D sont stables par u.

5. Montrer que la famille $((1, -3, 0), (0, 1, -1), e)$ est une base de $\mathbb{R}$, puis écrire la matrice de u dans cette base.

Exercice 17

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice invesible, $u, v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux vecteurs colonnes et $b \in \mathbb{K}$.

1. Déterminer $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. Exprimer le déterminant $\begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix}$ en fonction du déterminant de B.

3. Montrer que $\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b\det(B) - {}^t u\,{}^t\widetilde{B}v$ où $\widetilde{B}$ est la comatrice de B.

Exercice 18 (Déterminant de Vandermonde)

Soit $(a_1,\dots,a_n)$. on appelle déterminant de Vendermonde associé aux scalaire $(a_1,\dots,a_n)$ et on note $V(a_1,\dots,a_n)$ le déterminant suivant:

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_i & a_i^2 & \dots & a_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = V(a_1,\dots,a_{n-1},x)$.

1. Montrer que f est un polynôme en x de degré $\leq n-1$. On suppose dans la suite que les scalaires $a_1,\dots,a_n$ sont deux à deux distinctes.

2. Montrer que $a_1,\dots,a_{n-1}$ sont des racines de f.

3. En déduire que

$$V(a_1,\dots,a_{n-1},x) = \prod_{i=1}^{n-1}(x-a_i)V(a_1,\dots,a_{n-1}).$$

4. Montrer que $V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)$.

5. Vérifier que ce résultat est valable sans l'hypothèse deux à deux distincts.

Exercice 19 (Matrice compagnon)

Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On associe à P la matrice compagnon

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que C_P est inversible si, et seulement si, $P(0) \neq 0$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(C_P - \lambda I_n) = (-1)^n P(\lambda)$.
   Ind: $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \ldots + X^{n-1}L_n$
   On note u l'endomorphisme canoniquement associé à C_P. et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

3. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, $u^{k-1}(e_1) = e_k$.

4. Montrer que $P(u)(e_1) = 0$, en déduire que pour tout $1 \leq i \leq n$, $P(u)(e_i) = 0$.

5. Déduire de ce qui précède que $P(C_P) = 0$.

6. Montrer que si λ est une racine de P, alors il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$.

7. Montrer que s'il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$, alors λ est une racine de P.

Exercice 20

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie , F et G deux sous espaces supplémentaires dans E ($E = F \oplus G$). Soit u un endomorphisme de E. Montrer que si F et G sont stables par u, alors la matrice de u dans une base adaptée à la somme $F \oplus G$ est diagonale par blocs.

Exercice 21

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

   2.1 Montrer que $M = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$

   2.2 En déduire que $\det M = \det A \det C$.

Exercice 22

Soit E un espace vectoriel de dimension n, H et H' deux hyperplans de E distincts ($H \neq H'$).

1. Montrer que $\dim(H \cap H') = n-1$ ou $n-2$.
2. En déduire $\dim(H \cap H')$.
3. Montrer qu'il existe $(e, e') \in H \times H'$ tel que $e \notin H'$ et $e' \notin H$.
4. On pose $D = \mathrm{Vect}(e+e')$.

   4.1 Justifier que D est une droite vectoriel.

   4.2 Montrer que $E = H \oplus D = H' \oplus D$.

Exercice 23

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer que pour tout $1 \le i \le n$, il existe une unique forme linéaire φ_i vérifiant $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $1 \le j \le n$.
2. Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
3. Montrer que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$.
4. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i$.

Exercice 24

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Soit $(p_i)_{1 \le i \le r}$ une famille de projecteurs de E telle que $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(p_i) = n$.
2. En déduire que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(p_i)$.

Exercice 25

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et on suppose qu'il existe un vecteur non nul e tel que $u(e) = \lambda e$.

1. Vérifier que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas un isomorphisme.
2. Montrer que $(P(u))(e) = P(\lambda)e$.
3. Montrer que si P est un polynôme annulateur de u, alors $P(\lambda) = 0$.

Exercice 26

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Montrer qui si $P(0) \neq 0$, alors u est inversible.