Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice A:

1. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_u, le polynôme caractéristique de u.
2. Déterminer $\mathrm{Sp}(u)$.
3. Déterminer les sous espaces propres de u.
4. Donner une base de E formée de vecteurs propres de u, et écrire la matrice de u dans cette base.
5. Calculer $u(u - \mathrm{Id}_E)(u - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 3

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$.
3. Déterminer les sous espaces propres de A.
4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
5. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
2. Indiquer, sans faire les calculs, un méthode pour calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$ et l'inverse A^{-1} de A.

Exercice 5

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ la matrice dont tous les coefficients sont égales à 1.

1. Calculer J^2 en fonction de J.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de J.
3. Déterminer $\mathrm{Sp}(J)$.

Exercice 6

Soit u l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de u.
2. Déterminer les sous espaces propres de u, et en déduire une base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de E formée de vecteurs propres de u.
   Soit v un endomorphisme de E vérifiant: $uv=vu$.
3. Montrer que $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ sont des vecteurs propres de v.

Exercice 7

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&a&1\\a&0&1\\a&1&0\end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Calculer en fonction a le rang de la matrice A.
2. Montrer que $\chi_A=(X-a-1)(X+a)(X+1)$

Exercice 8

On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.
2. Déterminer les sous espaces propres de A.
3. Montrer que A est semblable à la matrice $D=\mathrm{diag}(1,j,j^2)$.
4. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, et $B=aI_3+bA+cA^2$. Déterminer $\mathrm{Sp}(B)$.

Exercice 9

On pose $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&-1\end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$.
3. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2,A)$.

Exercice 10

Soit A la matrice $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres, puis une base de vecteurs propres.
3. Résoudre le système différentielle :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x'&=&x+2z\\y'&=&y\\y'&=&2x+z\end{array}\right.$$

x,y et z désignes trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

On considère la matrice $\begin{pmatrix}-1&-4\\1&3\end{pmatrix}$

1. Démontre que A n'est diagonalisable.
2. Soit u l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   2.1 Trouver un vecteur propre v_1 de u associé à la valeur propre 1.

2.2 Donner un vecteur e tel que (v_1, e) soit une base de E.

2.3 Déterminer la matrice de u dans la base (v_1, e).

2.4 Résoudre le système différentielle suivante:

$$\begin{cases} x' &= -x-4y \\ y' &= x+3y \end{cases}$$

Exercice 12

Montrer sans faire des calculs, que la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. En écrivant la matrice de f dans une base bien choisie, montrer que le polynôme caractéristique de f est de la forme

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - a)$$

Où $a = \text{tr}(f)$. Quelles sont les valeurs propres de f?

2. Montrer que si $\text{tr}(f) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

3. Montrer que si $\text{tr}(f) \neq 0$, alors f est diagonalisable.

Exercice 14

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, et P le polynôme de degré n donné par $P = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0$.

A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est P.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soient f un endomorphisme de E et u un vecteur tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est libre.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a la même forme que A.

Exercice 15

Soit A une matrice carrée d'ordre n, non proportionnelle à la matrice identité et telle que $P_A = (X-\lambda)^n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$). Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 16

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M) = {}^tM$. Montrer que f est diagonalisable. (Ind: calculer f^2.)

Exercice 17

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 est aussi diagonalisable.

2. On suppose que f^2 est diagonalisable, et que $\ker f = \ker f^2$, montrer que f est diagonalisable.

Exercice 18

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note λ_1,λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et on suppose que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

2. Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, déterminer le vecteur propre e_k de u associé à la valeur propre λ_k et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.

3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base.

4. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ puis calculer P^{-1}.

5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $B^2 + 3B = A$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.

   5.1 Justifier que $v^2 + 3v = u$.

   5.2 Vérifier que $uv = vu$ et en déduire que, pour tout $k \in \{1,2,3\}$,le vecteur $v(e_k)$ est colinéaire à e_k,conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale.

   5.3 On pose $V = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Expliciter Δ en fonction de V puis déterminer les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ainsi que celle de la matrice B.

   5.4 Combien de solutions l'équation $X^2+3X = A$ admet-t-elle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer l'endomorphisme $P(f)$.

2. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si, f est diagonalisable.

Exercice 20

Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$vu - uv = \alpha u$$

1. On suppose que e est un vecteur propre de v associé à la valeur propre λ. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v(u^k(e)) = (\lambda + k\alpha)u^k(e)$.
   En déduire qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k(e) = 0$.

2. Montrer que si v est diagonalisable, alors u est nilpotent. (Ind: considérer une base formée de vecteurs propres de v....).

Exercice 21 (Théorème de Hadamard)

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $1 \le \forall i \le n$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$, alors A est inversible.

2. En déduire que le spectre de A est inclus dans $\bigcup\limits_{1\le i\le n} B_f(a_{ii}, \sum\limits_{j\neq i} |a_i j|)$. (où $B_f(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-a| \le r\}$).

Exercice 22

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$