Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) /\ f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que l'application $\varphi E^2 \to \mathbb{R}$ défini par
$$\varphi(f,g) = -\int_0^1 \left(f(t)g''(t) + f''(t)g(t)\right) dt$$
définit un produit scalaire sur E.

Exercice 2

Soit $E = \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application défini $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ défini par
$$\varphi(f,g) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right) dt$$
est un produit scalaire sur E.
2. Soient $F = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E\ /\ f'' = f\}$. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 3

1. Montrer que l'application $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$ définit un produit scalaire sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n\,\mathrm{tr}({}^tAA)}$.
3. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec A symétrique et B antisymétrique (i.e ${}^tB = -B$). Montrer que $A \perp B$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge.
2. Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^n, 1) = n!$.
4. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 e^{-t}dt$

Exercice 5

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (I_3, A) est une famille orthogonale de E.
2. Déterminer le projeté orthogonale de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $F = \mathrm{Vect}(I_3, A)$.

Exercice 6

On muni $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. Soit $H = \{(x,y,z,t) \in E /\ x - y + z - t = 0\}$.

1. Vérifier que H est un hyperplan de E
2. Déterminer $H^\perp$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 7

Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

1. Montrer que si x et y sont deux vecteurs unitaires, alors $x-y \perp x+y$.

2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ \langle x,y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

   2.1 Montrer que si x et y sont des vecteurs unitaires, alors $\|u(x)\| = \|u(y)\|$.

   2.2 En déduire qu'il existe un réel α tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \alpha\|x\|$.

   2.3 Montrer alors que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \alpha^2 \langle x,y \rangle$.

Exercice 8

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $e = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ un vecteur unitaire de E.

1. Déterminer la projection orthogonale sur $D = \text{Vect}(e)$.
   On pose $H = D^{\perp}$.

2. Vérifier que H est un hyperplan de E.

3. Déterminer la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur D, puis de la projection orthogonale sur H.

Exercice 9

Soit E un espace euclidien de dimension n et p un projecteur orthogonal de E de rang r. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x \rangle$.

2. Déterminer P la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.

3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = r$.

Exercice 10

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que:

$$\forall x \in E\,,\ \ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Soit $F = \text{Vect}(B)$. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. En déduire que $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

2. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$.

3. Soit $y \in E$. Calculer $\langle y, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \rangle$.

4. En déduire que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

5. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 11

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$.

1. Soit $F = \text{Vect}(I_n)$. Déterminer l'orthogonal de G.

2. Pour $A \in E$. Déterminer la projection orthogonale de A sur G et $G^{\perp}$.

3. On désigne par $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ les sous espaces formés des matrices symétriques respectivement antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   3.1 Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous espaces supplémentaires orthogonaux.

   3.2 Soit $A \in E$. Déterminer la projection ogthogonale de A sur $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$.

   3.3 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \text{tr}({}^t(A-M)(A-M))$.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que $u^* = -u$.
2. Montrer que $\ker u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.

Exercice 13

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 = n$.
2. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\right| \le n$.

Exercice 14

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases orthonormales de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, A et B sont respectivement les matrices de u dans les base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

1. Montrer que $\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}({}^tBB)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} \langle u(e_i), e_j\rangle^2$ ne dépend pas de la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 15

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 16

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $v = u^* u$.

1. Montrer que $v^* = v$.
2. Montrer que $\ker v = \ker u$.
3. Montrer que si v est injective alors l'application $\varphi : (x, y) \mapsto \langle u^* u(x), y\rangle$ défini un produit scalaire sur E.

Exercice 17

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 18

Soit $A \in \mathscr{M}_{\mathbb{R}}$ une matrice symétrique réelle. On suppose que A est positive c'est-à-dire

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \ge 0$$

1. Montrer que $\operatorname{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}_+$.
2. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Exercice 19

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique telle que $\operatorname{Sp}(u) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \ge 0$.

Exercice 20

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphise symétrique positive.

1. Montrer que les valeurs propres de u sont positives.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v tel que $v^2 = u$

Exercice 21

Soit E un espace euclidien et e un vecteur non nul de E. On note $D = \text{Vect}(e)$.

1. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur D.
   Soit s_e la symétrie orthogonale par rapport à D.

2. Montrer que pour tout $x \in E$, $s_e(x) = x - 2\dfrac{\langle x, e\rangle}{\|e\|^2}e$.

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24