Probabilités

Exercice 1

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n = \{$Le n-ème lancer donne Pile$\}$.

1. Décrire par une phrase chacun des événement suivant:
$B_1 = \bigcap_{n=4}^{+\infty} A_n$, $B_2 = (\bigcap_{n=1}^{4} \overline{A_n}) \cap (\bigcap_{n=5}^{+\infty} A_n)$, $B_3 = \bigcup_{n=6}^{+\infty} A_n$.

2. Écrire à l'aide des A_n les événements:
A = "On obtient au moins une fois Pile après le n-ième lancer".
B = "On obtient que des Piles a partir d'un certain lancer "

Exercice 2

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 3

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A , B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement " l'animal est en A après son n ème trajet ".
On note B_n l'événement " l'animal est en B après son $n$ème trajet".
On note C_n l'événement " l'animal est en C après son n ème trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. Déterminer a_n, b_n et c_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3. Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

4. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

5. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

6. Montrer comment les résultats précédents peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 4

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement " la boule tirée au $n$ème tirage est blanche " et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.

3. En déduire pour tout entier naturel non nul n la valeur de p_n.

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé.

1. Soient A et B deux événements indépendants tels que $A \subseteq B$. Montrer que $p(A) = 0$ ou $p(B) = 1$.

2. Montrer que si A est un événement indépendant de lui même, alors $p(A) = 0$ ou $p(A) = 1$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?

2. On choisit une urne au hasard et on tire une boule.Celle-ci est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré la boule dans l'urne U_k $(1 \leq k \leq n)$.

3. On choisit une urne au hasard et on tire successivement et avec remise 2 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches?

Exercice 7

On met en vente 50 " enveloppes mystère ". chaque joueur ouvre l(enveloppe immédiatement après l'avoir achetée et découvre s'il a gagné ou non. Une seule des enveloppes est gagnantes. Préférez-vous être le 1er acheteur? le 2ème? le 3ème? Quel acheteur préférez-vous être?

Exercice 8

On a deux urnes U_1 et U_2 . Dans U_1, il y a 3 boules rouges et 5 boules blanches. Dans U_2, il y a 5 boules rouges et 6 boules blanches. Les boules blanches sont indiscernables entre elles, les boules rouges aussi.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 . On tire ensuite, toujours au hasard, une boule dans U_2 et on la met dans U_1. On note R_1 l'événement " on a tiré une boule rouge de U_1" et R_2 l'événement "on a tiré une boule rouge de U_2".

1. Déterminer $P(R_1)$ et $P(R_2|_{R_1})$.

2. Déterminer la probabilité d'avoir tiré deux boules rouges consécutive. Que peut-on alors dire de la composition de l'urne U_1.

3. Déterminer la probabilité pour qu'au cours de l'expérience la composition de l'urne U_1 n'ait pas changé.

Exercice 9

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé, et $(A_n)_n$ une suite d'événement mutuellement indépendants tel que la série $\sum_n p(A_n)$ **diverge**.

Pour $n \in N$, on pose $D_n = \cup_{k \geq n} A_k$ et $D = \cap_{m \in \mathbb{N}} D_m$

1. Justifier que la suite $(D_m)_m$ est décroissante.

2. Montrer que $(A_n^c)_n$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.

3. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $1 - x \leq e^{-x}$.

4. Montre que pour tous n,p tels que $n \leq p$, $D_n^c \subset \cap_{n \leq k \leq p} A_k$.

5. En déduire que pour tous n,p tels que $n \leq p$, $p(D_n) \leq \prod_{n \leq k \leq p} p(A_n^k)$.

6. Montrer que pour tous n,p tels que $n \leq p$

$$p(D_n^c) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{p} p(A_k)\right)$$

7. Monter que pour tout n, $p(D_n^c) = 0$, en déduire que $p(D) = 1$.

Exercice 10

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé.

1. Soient A et B deux événements. Montrer que $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$.

2. Montrer que si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors $p(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p(A_k)$.

3. Soit A, B et C trois événements équiprobables, de probabilité p, et tels que $p(A \cap B \cap C) = 0$. Montrer que $p \leq \frac{2}{3}$.
   Indication : $1 - p(A \cap B \cap C) = \dots \leq \dots$

Exercice 11

Les fonctions suivantes, définies sur les singletons, se prolongent-elles en une probabilités sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$?

1. $\Omega = \mathbb{N}$, $p(\{k\}) = \frac{1}{2^k}$,

2. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $p(\{k\}) = \sin(\frac{1}{k})\sqrt{2+k}$,

3. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $p(\{k\}) = \frac{1}{k(k+1)}$,

4. $\Omega = \mathbb{N}$, $p(\{k\}) = \frac{1}{k!e}$.

Exercice 12 (Loi de Zipf)

Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit le réel $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

1. Démontrer que l'on peut définir une probabilité p sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide de réels $p_k = \frac{1}{\zeta(a)k^a}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
   On considère désormais l'espace probabilisé $(N^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), p)$.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_m = \{km \,/\, k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $p(m\mathbb{N}^*)$.

3. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^{*2}$. Déterminer $A_i \cap A_j$.

4. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^{*2}$. Montrer que les deux événements A_i et A_j sont indépendants si, et seulement si, i et j sont premiers entre eux.

Exercice 13

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$. on pose $D_n = \cap_{0 \leq p \leq n} A_p$.

1. Montrer que $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

2. En déduire que $p(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} p(A_k)$.

Exercice 14

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le premier qui obtient le jeu gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son $n$ème lancer?

2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?

3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas?

Exercice 15

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ une espace probabilisé, A et B deux événements avec $0 < p(B) < 1$.
Montrer que $p(A|_{\overline{B}}) = \dfrac{p(A) - p(A|_B)p(B)}{1 - p(B)}$