Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé. Soit A un événement, on considère la variable aléatoire 1_A définie par $1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $1_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$.

1. Montrer que $1_A = 1 - 1_{\overline{A}}$.
2. Déterminer la loi de 1_A. En déduire $E(1_A)$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1,]\!]$ et dont la loi est de la forme

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad p(X = k) = \lambda k.$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3

Une urne comporte des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard N numéros dans l'urne, en remettant le numéro tiré à chaque tirage. On appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer, pour $1 \leq k \leq n$, $p(X \leq k)$.
2. Démontrer que , pour $1 \leq k \leq n$, $p(X = k) = p(X \leq k) - p(X \leq k-1)$.
3. En déduire la loi de X.
4. Démontrer que $E(X) = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^N$.
5. Quelle est la limite de $\dfrac{E(X)}{n}$ quand $n \to +\infty$. En déduire un équivalent de $E(X)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On effectue deux tirages successifs et sans remise de cette urne. On note X_1 le numéros de la première boule et X_2 celui de la deuxième boule.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

Exercice 5

On lance n dés équilibrés, on note X le nombre de numéros différents sortis.
Pour $i \in [\![1,6]\!]$, on introduit X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si, et seulement si, la face numéro i est apparue.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires X_i.
2. Écrire X sous forme d'une somme de variables aléatoires et en déduire sont espérance.
3. Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$. Calculer la probabilité $p((X_i = 0) \cap (X_j = 0))$. En déduire $E(X_i X_j)$.

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $p((X = 1) \cap (Y = 1)) = p(X = 1)p(Y = 1)$.
2. Montrer que $E(XY) = p((X = 1) \cap (Y = 1))$.
3. En déduire que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Exercice 7

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $p_{ij} = \lambda i j$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

1. Déterminer λ pour que cela définisse une loi conjointe.
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant cette loi conjointe.

2. Déterminer les lois marginales. Calculer leurs espérances.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

4. Donner la valeurs de $\mathrm{Cov}(X,Y)$, en déduire la valeur de $E(XY)$.

5. On pose $Z = X+Y$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 8

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant la loi binômiale $\mathscr{B}(n,p)$. On pose $Z = X+Y$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Déterminer la loi de X sachant $(Z = n_0)$.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle fonction génératrice de X la fonction d'une variable t définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = E(t^X)$$

1. Montrer que G_X est une fonction polynôme et donner ses coefficients en fonction de la loi de X.

2. Démontrer que deux variables aléatoires X et Y ont même loi si, et seulement si, $G_X = G_Y$.

3. Montrer que $G_X(1) = 1, \quad E(X) = G'_X(1)$.

4. Montrer que $E(X(X-1)) = G''_X(1)$, en déduire $V(X)$.

5. Déterminer la fonction génératrice

   5.1 d'une variable suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

   5.2 d'une variable de Bernoulli de paramètre p.

   5.3 d'une variable binômiale de paramètre (n,p).

6. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, on pose $S = X_1 + \ldots + X_n$.

   7.1 Déterminer G_S.

   7.2 En déduire que S suit la loi binômiale de paramètre (n,p).

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

1. Calculer $p(X \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer $p(X \geq n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que que la loi géométrique est une loi sans mémoire i.e $p(X \geq n + m|_{X\geq m}) = p(X \geq n)$.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p(X \leq n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt.$$

Exercice 12

On considère les réels $p_{i,j} = \lambda \dfrac{a^i b^j}{i!j!}$, $i,j \in \mathbb{N}$, $a,b,\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer la valeur de λ pour laquelle ils forment la loi conjointe d'un cou-

ple de variables aléatoires.
on suppose la condition précédente remplie. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant les $p_{i,j}$ comme coefficients de sa loi.

2. déterminer les lois marginales.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes.

4. Déterminer la loi de la somme $X+Y$.

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Démontrer que $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{m} n p(X=n) = \left(\sum_{n=1}^{m+1} p(X \geq n)\right) - (m+1)p(X \geq m+1).$$

2. En déduire que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n} p(X \geq n)$ converge et que dans ce cas $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(X \geq n)$.

Exercice 14

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et de même loi :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad p(X=k) = p(Y=k) = p(1-p)^k$$

avec $p \in]0,1[$. On pose $S = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$.

1. Pour $i \in \mathbb{N}$, calculer $p(S \geq i)$.

2. En déduire la loi de S.

3. Pour $i \in \mathbb{N}$, calculer $p(T \leq i)$.

4. En déduire la loi de T.

5. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes?

Exercice 15

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes positives, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Démontrer que si X et Y admettent une espérance, alors il en va de même des variables aléatoires $M = \max(X,Y)$, $\quad R = \sqrt{XY}$ et $F = \dfrac{XY}{X+Y}$ (pour F on suppose de plus que $X+Y>0$).

Exercice 16

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$p((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{1}{e2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. 2.1 Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

   2.2 Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

4. Calculer $p(X=Y)$.

Exercice 17

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p(X=n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle F définie par $F = \dfrac{1}{T(T+1)(T+2)}$.

2. Calculer λ.

3. Prouver que X admet une espérance puis la calculer.

4. X admet-il une variance? Justifier.

Exercice 18

Une urne contient 6 boules blanches et 5 boules noires. On effectue une suite de tirage d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Déterminer $X(\Omega)$.

2. Que représente les événements $(X=1)$, $(X=2)$ et $(X=k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Déterminer la loi de X.

4. Que vaut l'espérance de X.

Exercice 19

Soit X une variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. On suppose que X et $f(X)$ admettent toutes deux une espérance.

1. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq f'(E(X))(t - E(X)) + f(E(X))$.

2. En déduire que $f(E(X)) \leq E(f(X))$.

Exercice 20

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivants des lois de Poisson de paramètres respectivement λ_1 , $\lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $Z = X + Y$.

1. Calculer $p(Z=0)$, $p(Z=1)$ et $p(Z=2)$.

2. Déterminer la loi de Z.

Exercice 21

Soit θ un réel strictement positif, ε un réel strictement positif et p un réel de $]0,1[$, on pose $q = 1-p$. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$. On pose

$\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier que $p(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon) = p(e^{n\theta \overline{X_n}} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)})$.

2. Montrer que $E(e^{n\theta \overline{X_n}}) = \left(pe^{\theta} + q\right)^n$.

3. Déterminer la loi de nX_n.

4. En déduire que

$$p(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^{\theta}+q) - \theta(p+\varepsilon))}$$

Exercice 22

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes et X une variables aléatoires. On suppose que toutes les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \lim_{n \to +\infty} p(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

1. On pose $S_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$. Montrer que si les variables aléatoires $(X_n)_n$ sont indépendantes, admettant une espérance commune m et une variance commune σ^2 alors la suite $(S_n)_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante m.

2. Montrer que si $E(X_n) \to E(X)$ et si $V(X_n - X) \to 0$ alors la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X.

3. On suppose que Y_n suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$ et on pose $Z_n = \exp(S_n/n)$.

   3.1 Calculer l'espérance et la variance de Z_n

   3.2 La suite $(Z_n)_n$ converge-elle en probabilité?