Primitives et calculs d'intégrales

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2+x+1}dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{x^2+3x+2}dx.$
4. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x+i}dx$

Exercice 2.

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
2. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}}$
3. $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+4x+5}$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$;
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1+\tanh^2(\frac{x}{2})}{1-\tanh^2(\frac{x}{2})}.$$
2. En déduire les primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivants :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t\arcsin t \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{2} \mathrm{argch}\, t \,\mathrm{d}t$

Exercice 5.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Monter que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t-z}\,dt = \ln|x-z| + i\arctan\frac{x-a}{b} + C^{te}$

Exercice 6.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.
Montrer que $f \geq 0$ ou $f \leq 0$.

Exercice 8.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue telle que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$

1. Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f = 0$.
2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = re^{i\theta} \neq 0$ $(r > 0)$.
   On pose $g = fe^{-i\theta}$
   - 2.1 Montrer que $\displaystyle\int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t))\,dt$.
   - 2.2 En déduire que $f = |f|e^{i\theta}$

Exercice 9.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt$ est Lipschitzienne.
2. Si de plus f est ce classe $\mathscr{C}^1$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = 0$

Exercice 10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues.

1. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 . \int_a^b g^2$$

2. Montrer que

$$\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 11 (Lemme de Grönwall)**.**

soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues positives et $c > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \, , \; f(x) \leq c + \int_0^x f(t)g(t)dt$$

On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$;

$$\int_0^x \frac{f(t)g(t)}{c+h(t)} dt \leq \int_0^x g(t)dt$$

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$;

$$f(x) \leq c \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

Exercice 12.

Soit P un polynôme. Montrer que

$$\int_{-1}^1 P(t)dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta$$