Suites numériques

Exercice 1.

Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Si une suite positive est non majorée elle tend vers $+\infty$.
2. Toute suite convergente est bornée .
3. Toute suite bornée est convergente.
4. Toute suite monotone est convergente.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.

Exercice 3.

Étudier les limites des suites suivantes :
$\cos \frac{n}{n!}$; $\cos(n)\sin(\frac{1}{n})$; $\frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+n}$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique :

1. Montrer que si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite ℓ alors la suite $(u_n)_n$ converge de limite ℓ.
2. Montrer que si les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ sont convergentes, alors la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 5.

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
Déterminer la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\forall n, m \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq u_{n+m} \leq \frac{n+m}{nm}$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Exercice 7.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n^2+3u_nv_n+3v_n^2)=0$$

Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes (de limite nulle) .

Exercice 8.

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=-1$ et $\forall n\in N$, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.
Montrer que cette suite est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 9 (*e est irrationnelle*)**.**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose :
$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. Montrer que la limite commune à $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est irrationnelle.
3. Montrer que :
   $\forall n\in\mathbb{N}\,,\ e=u_n+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt.$
4. En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers e.

Exercice 10.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle de limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_n$.

1. Théorème de Cesàro : Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ existe et vaut ℓ.
2. Applications :
   - 2.1 Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell\in\mathbb{R}$. Monter que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{n}=\ell$.
   - 2.2 Soit $(u_n)_n$ une suite de terme générale strictement positif telle que :
     $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ell\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.
     Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$.
   - 2.3 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{C_{2n}^n}$.

Exercice 11.

Montrer que la suite $(\sin n)_n$ diverge.

Exercice 12.

Soit $a>0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=a$ et $u_{n+1}=u_n+u_n^2$

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.
2. En déduire la limite de $(u_n)_n$.
3. Démontrer que :
   $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n^2\leq u_{n+1}$ et $u_{n+1}+1\leq(u_n+1)^2$.
4. Démontrer que :
   $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n+1\leq(1+u_0)^{2^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_n^{\frac{1}{2^n}}$ et $w_n=(u_n+1)^{\frac{1}{2^n}}$.
   - 4.1 Justifier ces définitions et montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n>0$ et $w_n>0$.
   - 4.2 Démontrer que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent.
   - 4.3 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{w_n}=1$.
   - 4.4 Montrer que les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 13.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$.
Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite.

Exercice 14 (Comparaison logarithmique)**.**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à termes strictement positifs, telles que à partir d'une certain rang n_0 ; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Montrer que la suite $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est bornée .
Application : Montrer que pour tout $a>1$, la suite $(\frac{a^n}{n!})_n$ tend vers 0.

Exercice 15.

Soit $(z_n)_n$ une suite complexe telle que $z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{2}$.
Étudier la convergence de $(z_n)_n$.

Exercice 16.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de $(S_n)_n$.

Exercice 17.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer que si $0 < a \leq b$, alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
3. Soient u_0 et v_0 deux réels strictement positifs tels que $u_0 < v_0$, on définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de la façon suivante $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

   3.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq v_n$.

   3.2 Montrer que les deux suites $(u)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 18.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que la suite $(u_n v_n)_n$ converge de limite 1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.

Exercice 19.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_n$ une suite numérique bornée dont toute sous-suite convergente converge vers ℓ. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente.

Exercice 20.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que $3u_n + u_{2n}$ converge vers 1.

1. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\phi(n)})_n$ converge. On note ℓ_0 sa limite. Montrer que ,pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(u_{2^k\phi(n)})_n$ converge et calculer sa limite ℓ_k en fonction de ℓ_0 et k. Puis montrer que $(\ell_k)_k$ est bornée.
   En déduire ℓ_0.
2. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21.

Déterminer la suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant : $4u_{n+2}-8u_{n+1}+3u_n$ avec $u_0=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Donner une expression simple de $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 22.

Donner l'expression des suites réelles récurrente suivantes :

1. $u_0=3$, $u_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$.
2. $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n$.
3. $u_0=1$, $u_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=-2u_{n+1}-u_n$.