Ensembles applications et relations

Exercice 1.

Exprimer à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis donner leurs négations :

1. Tout réel possède au moins une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
2. Tous les réels ne sont pas des quotient d'entiers.
3. Certain réel est strictement supérieur à son carré.
4. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
5. Tout nombre réel est positif.

Exercice 2.

Démontrer que pour toutes parties A, B et C d'un même ensemble E :

1. $A \setminus B = C_E^B \setminus C_E^A$.
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Exercice 3.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (\forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$$

Comparer avec l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall \varepsilon > 0 \quad (|x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0)$$

Exercice 4.

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\,,\ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\}$

1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2. Montrer que : $\exists x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $x^y \in \mathbb{Q}$
   (Ind : Discuter deux cas selon $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ ou non)

Exercice 5.

Soit $E = \{x, y\}$ avec $x \neq y$
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :
$x \in E$, $\{x\} \in E$, $\{\emptyset\} \subset E$, $\{x, \emptyset\} \subset E$

Exercice 6.

Soit x un objet, décrire les ensembles
$\mathscr{P}(\{x\})$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x\}))$

Exercice 7.

Soit E un ensemble.
A , B et C des parties de E telles que :
$A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$
Montrer que $A = B = C$

Exercice 8.

Soit E un ensemble non vide , A et B deux parties de E, on considère dans $\mathscr{P}(E)$ l'équation $X \cap A = B$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation possède des solutions
2. On suppose que cette condition est vérifiée. Démontrer que X est solution si, et seulement si, $\exists Y \in \mathscr{P}(E)$ telle que $X = B \cup (Y \setminus A)$

Exercice 9.

Soit E unensemble. A , B et C des parties de E. Montrer que

1. $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$
2. $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$
3. $(B \setminus C \subset A \text{ et } C \setminus D \subset A) \Rightarrow B \setminus D \subset A$

Exercice 10.

Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E. Démontrer que

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$$

Exercice 11 (Fonction indicatrice)**.**

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E on note φ_A l'application de $E \to \{0,1\}$ définie par $\varphi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. Montrer que

1. $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$
2. $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \varphi_B$
3. $\varphi_{\overline{A}} = 1 - \varphi_A$
4. $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_{A\cap B}$
5. $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A(1-\varphi_B)$
6. En déduire que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
7. **Application :** Résolution de l'équation $A\Delta X = B$:
   - 7.1 Calculer $A\Delta A$.
   - 7.2 Résoudre l'équation $A\Delta X = B$ d'inconnu X.

Exercice 12.

Soit E un ensemble non vide.

1. Montrer qu'il existe une injection de $E \to \mathscr{P}(E)$
2. Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$ une application
   On pose $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$
   — Montrer que $\forall x \in E$, $f(x) \neq A$
   — En déduire qu'il n'existe aucune surjection de $E \to \mathscr{P}(E)$
3. En déduire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable

Exercice 13.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective

Exercice 14.

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de F

1. Montrer que $f(f^{-1}(A)) = A \Leftrightarrow A \subset f(E)$
2. En déduire que f est surjective si, et seulement si, $\forall A \subset F$, $f(f^{-1}(A)) = A$

Exercice 15.

Soit $f : E \to E$ une application, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois) et $f^0 = id_E$
Pour $A \subset E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

1. Montrer que $f(B) \subset B$
2. Monter que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A

Exercice 16.

Soit E un ensemble, et A une partie de E.
On note par f_A l'application définie de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$, par : pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $f_A(X) = X \cap A$.

1. Déterminer $f_A(\mathscr{P}(E))$.
2. Montrer que si $A \neq E$, alors f_A n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 17.

Soient E et F deux ensembles.
Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si, et seulement si, il existe une application surjective de F dans E.

Exercice 18 (Point fixe)**.**

Soit E un ensemble non vide et $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ une application vérifiant : $\forall X, Y \in \mathscr{P}(E)$, $X \subseteq Y \Rightarrow \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$.

1. Soit $S = \{X \in \mathscr{P}(E) \text{ , } \varphi(X) \subseteq X\}$. Montrer que S est non vide.
2. On pose $A = \bigcap_{X\in S} X$. Montrer que $\varphi(A) = A$.

Exercice 19.

Sur $\mathbb{C}$, on considère la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par :pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$

$$z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence du nombre complexe z.

Exercice 20 ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{R}_n$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ a\mathcal{R}_n b \Leftrightarrow$ $n$divise $(b-a)$

1. Montrer que $\mathcal{R}_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Soit $x\in\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{x}=x+n\mathbb{Z}$.
3. Montrer que l'application
   $s:\{0,1,\dots,n-1\}\to\mathbb{Z}/\mathcal{R}_n$ définie pour tout $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ par $s(k)=\overline{k}$ est une bijection.
4. Calculer le cardinal de l'ensemble quotient $Z/\mathcal{R}_n$.
   L'ensemble quotient $Z/\mathcal{R}_n$ se note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 21.

Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x^3+2)(y^2+1)=(y^3+2)(x^2+1)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Déterminer pour $\mathcal{R}$ la classe de $x\in\mathbb{R}$

Exercice 22.

Soit E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E , $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i\in I \text{ tel que } x,y\in A_i$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Déterminer la classe d'équivalence de $x\in E$

Exercice 23.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sue $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x\le x' \\ y\le y' \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$
2. Cet ordre est-il total ou partiel ?
3. Soit $A=\{(a,b),(a',b')\}$ avec $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$
   A est-elle majorée ?minorée ?
   A admet-elle un plus grand élément ?un plus petit élément ?justifier.
4. Même question que 3) avec $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,/\,x^2+y^2\le 1\}$

Exercice 24.

Soit E un ensemble, $\mathscr{R}$ une relation réflexive dans E telle que

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \ , \ (\begin{cases} x\mathscr{R}y \\ y\mathscr{R}z \end{cases}) \Rightarrow z\mathscr{R}x$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

Exercice 25.

Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la relation binaire $\mathscr{R}$ par :

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. Cet relation est-il total ?
2. Déterminer l'ensemble des majorant du couple (x, y) pour la relation $\mathscr{R}$