Systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes linéaires suivants:

1. $\left\{ x+y+z+t = 3 \right.$

2. $\left\{ \begin{array}{lcl} x+y+z+t & = & 3 \\ 2x+2y+2t+3t & = & \alpha \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\left\{ \begin{array}{lcl} x+y+z+t+2s & = & 2 \\ x-y+z-t+s & = & 3 \end{array} \right.$

4. $\left\{ \begin{array}{ll} x+2y-z & =1 \\ x-y-z & =3 \end{array} \right.$

5. $\left\{ \begin{array}{ll} x+y+z+t & =0 \\ 2x+y+2z+3t & =2 \\ 3x+3y+z+t & =4 \end{array} \right.$

6. $\left\{ \begin{array}{lcl} x+y-2z+t & = & \alpha \\ x+2y+3t & = & 2\alpha \\ x-2y-z & = & 2 \\ x+2z-t & = & \alpha+2 \end{array} \right.$
avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2

On considère le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x+2y-3z & = & a \\ 2x+6y-11z & = & b \\ x-2y+7z & = & c \end{array} \right.$$

où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système ait au moins une solution?

2. Est-ce que ce système peut avoir une unique solution?

Exercice 3

Résoudre le système non linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} xyz & = & 2 \\ \frac{xz}{y} & = & 1 \\ \frac{x^2}{yz^3} & = & 4 \end{array} \right.$$

Où x, y et z sont des réels strictement positifs.

Exercice 4

Soit α un paramètre réel. On considère le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x-y-z+\alpha t & = & 1 \\ x+\alpha y-z-t & = & -\alpha \\ \alpha x+y+z+t & = & -1 \\ x-y+\alpha z-t & = & -\alpha \end{array} \right.$$

1. Échelonner ce système, pour quelle valeur de α ce système admet-il une unique solution? Calculer cette solution en fonction de α dans ce cas.

2. Sinon, vérifier si le système est compatible ou non et, dans l'affirmative , donner l'ensemble de ses solutions.

Exercice 5

Résoudre le système linéaire suivant: $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 2 \\ x_1+x_2+x_3+2x_5 & = & 0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5 & = & 1 \end{array} \right.$

Exercice 6

Soit (T) un système linéaire à p inconnus et n équations, et notons (T_0) le système linéaire homogène associé à (T).
Pour $x=(x_1,\dots,x_p)$, $y=(y_1,\dots,y_p)\in\mathbb{K}^p$, on note $x+y$ (resp. $x-y$) l'élément de $\mathbb{K}^d$ définie par $x+y:=(x_1+y_1,\dots,x_p+y_p)$ (resp. $x-y:=(x_1-y_1,\dots,x_p-y_p)$).

On suppose que (T) admet une solution particulière $X_0 \in \mathbb{K}^p$.

1. Montrer que $(s(T_0), +)$ est un sous groupe de $\mathbb{K}^n$.

2. Montrer que $Y \in \mathbb{K}^p$ est solution de (T) si, et seulement si, $Y - X_0$ est solution de (T_0).

3. En déduire que $s(T) = X_0 + s(T_0)$ où $X_0 + s(T_0) := \{X_0 + X \ , \ X \in s(T_0)\}$.

Exercice 7

Résoudre selon les valeurs du paramètre m le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x + y + mz &= 2 \\ x + my + z &= 3 \\ mx + y + z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 8

Résoudre selon les valeurs des paramètres a, b et c le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{cases}$$

Exercice 9

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. Résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ x + by + b^2z &= 2 \\ x + cy + c^2z &= 3 \end{cases}$$

Exercice 10

Soient $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tels que $P(x_i) = y_i$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 11

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. Résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x + y - z &= a \\ 2x + y + z &= b \\ -x - 2y - 3z &= c \end{cases}$$

Exercice 12

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.

2. Montrer que le système

$$\begin{cases} x + y + z &= a \\ x + jy + j^2z &= b \\ x + j^2y + jz &= c \end{cases}$$

est de Cramer, puis en déterminer l'unique solution (x, y, z).

Exercice 13

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si $1 + X + X^2$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$ alors $X - 1$ divise divise P et Q.