Espaces vectoriels

Exercice 1

Les parties suivantes sont elles des sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$?

1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 | x+y-z+t=0\}$,
2. $F = \{(x,y,z) \mid x+y=0\,,\ x+2y+3z=1\}$
3. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x^2=0\}$
4. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid xy=z\}$
5. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid x=0\}$
6. $F = \{(x, x+y, x-y) \mid x,y \in \mathbb{K}\}$

Exercice 2

Les parties suivantes sont-elles des sous espaces vectoriels de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $F = \{f \in E \,|\, f$ est $2\pi-$ périodique $\}$.
2. $F = \{f \in E \,|\, f$ est bornée sur $\mathbb{R}\}$.
3. $F = \{f \in E \,|\, f(3)=0\}$.
4. $F = \{f \in E \,|\, f(-1)f(1)=0\}$.
5. $F = \{f \in E \mid f(-1)=f(1)\}$.

Exercice 3

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4\ / x+y+z+t=0\,,\ y-z-t=0\}$. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$.

Exercice 4

Soit $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\ \ /\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n\}$. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5

Soit F défini par:

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{lcl} x-y & = & 0 \\ z-t & = & 0 \end{array}\right. \}$$

On pose $u = (1,-1,0,0)$ et $v = (0,0,1,-1)$, et $G = \mathrm{Vect}(u,v)$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une famille génératrice de F (formée par deux vecteurs).
3. Montrer que la somme $F+G$ est directe.
4. Démontrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 6

Soit F, G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriels E. Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel si, et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Exercice 7

Pour $n \in Z$, on note e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$.

1. Pour $n,m \in Z$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e_n(t)e_m(t)dt$.
2. En déduire que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre.

Exercice 8

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_a(x) = |x-a|$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, quel est le demain de dérivabilté de f_a.
2. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel et $u_1,\dots,u_n \in E$. Pour $1 \le i \le n$, on pose $v_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} u_k$. Montrer que si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre alors $(v_1,\dots,v_n)$ est libre.

Exercice 10

Montrer que la famille $(1, \cos, \cos^2, \ldots, \cos^n)$ est libre $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{K}_n[X]$.
Montrer que la famille $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^n)$ est une base de E_n.

Exercice 12

Soit $f : E \to E$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

1. Montrer que E_λ est un sous espace vectoriel de E.
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in E_\lambda$.
3. Montrer que $f(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $fg = gf$.

1. Montrer que $f(\ker g) \subseteq \ker g$.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}\, g) \subseteq \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{L}(\mathbb{K}, E) \to E$ définie par $\varphi(f) = f(1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 15

Soit N l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$ de limite nulle et C celui des suites Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

1. Vérifier que N et C sont des Q espaces vectoriels.
2. Montrer que C/N et $\mathbb{R}$ sont isomorphes.

Exercice 16

Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Établir une bijection entre l'ensemble des sous espaces vectoriels de E/F et celui des sous espaces vectoriels de E contenant F

Exercice 17

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Soit $h : F \times G \to E$ définie par $h(x, y) = x + y$. On pose $N = \{(x, -x) \ / \ x \in F \cap G\}$.

1. Montrer que h est linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de h.
3. Montrer que $(E \times G)/N$ est isomorphe à $F + G$.

Exercice 18

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Montrer que $F/(F \cap G)$ et $(F+G)/G$

Exercice 19

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Montrer que $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = f(\ker f^2)$

Exercice 20

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\, f^{k+1} \subset \mathrm{Im}\, f^k$

Exercice 21

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montre que $\ker f = \ker f^2$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{0\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ si, et seulement si, $\ker f + \mathrm{Im}\, f = E$.

Exercice 22

Soit $\varphi : \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{K}) \to \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = f'$, où $a < b$ sont des réels.

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.
3. L'application φ est-elle injective, surjective?

Exercice 23

Soit f un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$, i.e $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Justifier qu'il existe $v \in E$ tel que $f^{p-1}(v) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(v, f(v), \ldots, f^{p-1}(v))$ est libre.
3. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{p-1})$ est libre.
4. Un exemple d'endomorphisme nilpotent: Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par $f(x,y,z) = (0,x,y)$.
   Calculer f^2 et f^3.

Exercice 24

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(e_1) = (1,1,1,-1)\ ,\ f(e_2) = (-1,0,1,3)\ ,\ f(e_3) = (2,0,-1,1)$$

1. Calculer $f(x,y,z)$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker f$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 25

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ définie par :

$$f(e_1) = 0\ ,\ f(e_2) = e_1\ ,\ f(e_3) = e_1 + e_2$$

1. Calculer $f^2(e_i)$, puis $f^3(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$.
2. En déduire que $f^3 = 0$.
3. Une deuxième méthode pour calculer f^3 (calcul explicit):
   - 3.1 Calculer $f(x,y,z)$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$.
   - 3.2 Calculer $f^2(x,y,z)$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$. En déduire que $f^3 = 0$.
4. Soit g , l'endomorphisme $g = f - \mathrm{Id}_E$.
   - 4.1 Montrer que $g^3 + 3g^2 + 3g + \mathrm{Id}_E = 0$
   - 4.2 En déduire que g est un isomorphisme et déterminer g^{-1} en fonction de g.

Exercice 26

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p+q$ est un projecteur alors

$$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$$

Exercice 27

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous espaces vectoriels de E. Soit $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to E$ l'application définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ (l'image de f).

3. Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si, et seulement si, f est injective.

4. Montrer que si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ et $\sum_{i=1}^{n} E_i$ sont isomorphes.

5. Dans la suite $n = 2$.

   5.1 Montrer que $\ker f = \{(x, -x) \in E_1 \times E_2 \ / \ x \in E_1 \cap E_2\}$.

   5.2 Montrer que $E_1 + E_2$ est isomorphisme à $E_1 \times E_2 / \ker f$.

Exercice 28

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E. Montrer que E/G et F sont isomorphes.

Exercice 29

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 + f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Calculer $(f - \mathrm{Id}_E)(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq \ker(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{Id}_E) \subseteq \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

4. Montrer que la somme $\ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$ est directe.

5. Déterminer deux scalaires $a, d \in \mathbb{K}$ tels que $a(f - \mathrm{Id}_E) + b(f + 2\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$.

6. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 30

Soit E un espace vectoriel et $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle.

1. Montrer que f est surjective.

2. Montrer que $E/\ker f$ est isomorphe à $\mathbb{K}$.

3. En déduire qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.

4. Montrer que $\ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = E$.

Exercice 31

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $fg = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que f est surjective et g injective.
   On pose $p = gf$.

2. Montrer que p est un projecteur de E.

3. Montrer que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, g$ et $\ker p = \ker f$.

4. Montrer que $\ker f \oplus \mathrm{Im}\, g = E$.

Exercice 32

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et A une partie finie non vide de $\mathrm{GL}(E)$ stable par composition. On pose

$$p = \frac{1}{|A|}\left(\sum_{f \in A} f\right)$$

1. Montrer que A est un sous groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

2. Montrer que pour tout $g \in A$, $gp = p$.

3. En déduire que p est un projecteur de E.