Examen blanc

E Espaces vectoriels et matrices f

LPEM

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On dit que f est une homothétie de E, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}_E$.

Exercice 1 Résoudre, en indiquant les opérations élémentaires utilisées, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3)(A - 2I_3)$.
2. Calculer $A(A - I_3)(A - 2I_3)$.
3. La matrice A est-elle inversible ? Justifier.

Exercice 3 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\dim F$.
3. Soit $G = \operatorname{Vect}((1,0,0))$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

PROBLÈME

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Première partie :
Une caractérisation des homothéties

Dans cette partie, f est un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que $\lambda_{e_i} = \lambda_{e_j}$. Ind : on pourra utiliser le vecteur $e_i + e_j$.
3. En déduire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}_E$.

Deuxième partie : Commutant de $\mathscr{L}(E)$

Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E, c'est-à-dire pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, $fg = gf$.

4. Soit x un vecteur non nul de E.

4.1 Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in E$ tel que la famille $\mathscr{B}' = (x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ soit une base de E. On note h_x l'unique endomorphisme de E vérifiant : $h_x(x) = x$ et $h(\varepsilon_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

4.2 Montrer que pour tout $y \in E$, $h_x(y) \in \text{Vect}(x)$.

4.3 Montrer que $f(x) = h_x(f(x))$.

4.4 En déduire que la famille $(x, f(x))$ est liée.

5. Montrer que f est une homothétie.

Troisième partie : Non homothétie en dimension 2.

Dans cette partie $n = 2$, et f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

6. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $\mathscr{B}_1 = (e, f(e))$ soit une base de E.

7. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $f^2(e) = ae + bf(e)$.

8. Montrer que pour tout $x \in E$, $f^2(x) = ax + bf(x)$.