Examen blanc

E Espaces vectoriels et matrices f

LPEM

Corrigé

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On dit que f est une homothétie de E, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}_E$.

Exercice 1 Résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$$

En effectuant les deux opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $x = 1$, $y = z = 0$. Donc $S = \{(1,0,0)\}$

Exercice 2 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $(A-I_3)(A-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A(A-I_3)(A-2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$

3. La matrice A n'est pas inversible. En effet si A est inversible, alors $(A-I_3)(A-2I_3) = A^{-1}A(A-I_3)(A-2I_3) = A^{-1}.0 = 0$, ce qui contredit le résultat de la première question.

Exercice 3 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0\}$.

1. On a $0 - 0 + 2 \times 0 = 0$, donc $(0,0,0) \in F$. Soient $u = (x,y,z)$, $v = (a,b,c)$ deux éléments de F et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $u + \alpha v = (x + \alpha a, y + \alpha b, z + \alpha c)$. Comme $(x+\alpha a) - (y + \alpha b) + 2(z + \alpha c) = (x - y + 2z) + \alpha(a - b + 2c) = 0$, il vient alors que $u + \alpha v \in F$. Donc F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a $u \in F$ si, et seulement si, $x = y - 2z$ si, et seulement si, $u = (y - 2z, y, z) = y(1,1,0) + z(-2,0,1)$. On en déduit que $F = \operatorname{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$ ou encore que $((1,1,0),(-2,0,1))$ est génératrice de F. Par une simple vérification cette famille est libre, donc c'est une base de F. D'où $\dim F = 2$.

3. Soit $u \in F \cap G$, il existe α tel que $u = \alpha(1,0,0) = (\alpha,0,0)$, et comme $u \in F$ on a donc $\alpha - 0 + 2\times 0 = 0$ c'est-à-dire $\alpha = 0$, par suite $u = 0$. Ainsi la somme $F+G$ est directe. Le sous espace vectoriel G est engendré par un vecteur non nul, il s'agit alors d'une droite vectorielle, donc $\dim G = 1$. Finalement on a $\dim G + \dim F = \dim \mathbb{R}^3$, d'où $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

PROBLÈME

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Première partie : Une caractérisation des homothéties

Dans cette partie, f est un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, $f(x) = 1x$ (par exemple $\lambda_0 = 1$).
Si $x \neq 0$. La famille $(x, f(x))$ étant liée, donc ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0$, puis $\beta f(x) = -\alpha x$. On a $\beta \neq 0$ (car si $\beta = 0$ alors $\alpha x = 0$ et donc $\alpha = 0$), d'où $f(x) = -\frac{\alpha}{\beta} x$. Dans ce cas $\lambda_x = -\frac{\alpha}{\beta}$.

2. Si $i = j$ rien à démontrer. On suppose alors que $i \neq j$. On a $f(e_i + e_j) = f(e_i) + f(e_j)$. D'une part $f(e_i + e_j) = \lambda(e_i + e_j) = \lambda e_i + \lambda e_j$ où $\lambda = \lambda_{e_i + e_j}$ (d'après la question précédente). D'autre par $f(e_i) + f(e_j) = \lambda_{e_i} e_i + \lambda_{e_j} e_j$. Donc $\lambda e_i + \lambda e_j = \lambda_{e_i} e_i + \lambda_{e_j} e_j$ ou encore $(\lambda - \lambda_{e_i}) e_i + (\lambda - \lambda_{e_j}) e_j = 0$. Puisque la famille (e_i, e_j) est libre, on a donc $\lambda - \lambda_{e_i} = \lambda - \lambda_{e_j} = 0$, et donc $\lambda_{e_i} = \lambda = \lambda_{e_j}$.

3. D'après la question précédente, λ_{e_i} ne dépend pas de i, c'est-à-dire $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = \dots = \lambda_{e_n}$. Si on note par λ la valeur de cette constante, on a donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(e_i) = \lambda e_i$. Soit $x \in E$, il existent $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda e_i = \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \lambda x$.
D'où $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Deuxième partie : Commutant de $\mathscr{L}(E)$

Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E, c'est-à-dire pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, $fg = gf$.

4. Soit x un vecteur non nul de E.

4.1 Comme $x \neq 0$, la famille (x) formé par l'élément x est libre, d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E, c'est-à-dire ils existent $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in E$ tel que $\mathscr{B}' = (x, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ soit une base de E.
On note h_x l'unique endomorphisme de E vérifiant : $h_x(x) = x$ et $h(\varepsilon_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

4.2 Soit $y \in E$, ils existent $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que $y = y_1 x + y_2 \varepsilon_1 + \dots + y_n \varepsilon_{n-1}$ (car $\mathscr{B}'$ est une base de E). Donc $h_x(y) = y_1 h_x(x) + y_2 h_x(\varepsilon_1) + \dots + y_n h_x(\varepsilon_{n-1}) = y_1 x \in \mathrm{Vect}(x)$.

4.3 En tenant compte la commutativité de f et h_x et le fait que $h_x(x) = x$, on obtient, $f(x) = f(h_x(x)) = h_x(f(x))$.

4.4 D'après les résultats des deux questions précédentes, on a , $f(x) = h_x(f(x)) \in \mathrm{Vect}(x)$, c'est-à-dire il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \alpha x$ ou encore $f(x) - \alpha x = 0$, donc la famille $(x, f(x))$ est liée.

5. D'après ce qui précède, pour tout vecteur non nul x, la famille $(x, f(x))$ est liée, comme la famille $(0, f(0))$ est liée, on a donc pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. On en déduit alors, en appliquant le résultat de la première partie, que f est une homothétie.

Troisième partie :
Non homothétie en dimension 2.

Dans cette partie $n = 2$, et f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

6. Si pour tout vecteur $e \in E$ la famille $(e, f(e))$ est liée, alors f est une homothétie, ce qui n'est pas le cas. Il existe alors $e \in E$ tel que la famille $(e, f(e))$ est libre, donc c'est une base de E car $\dim E = 2$.

7. On a $f^2(e) \in E$ et $\mathscr{B}_1$ base de E, donc ils existent $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $f^2(e) = ae + bf(e)$.

8. Soit $x \in E$. Ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $x = \alpha e + \beta f(e)$. Donc

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= f^2(\alpha e + \beta f(e)) = \alpha f^2(e) + \beta f^3(e) = \alpha f^2(e) + \beta f(f^2(e)) \\
&= \alpha f^2(e) + \beta f(ae + bf(e)) = \alpha ae + \alpha bf(e) + \beta af(e) + \beta bf^2(e) \\
&= a(\alpha e + \beta f(e)) + bf(\alpha e + \beta f(e)) = ax + bf(x)
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in E$, $f^2(x) = ax + bf(x)$.