

## Examen (Algèbre 3)

E

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

f

LPEM

En cas de problème rencontré lors de la remise des documents via Moodle, envoyez-les à l'adresse suivante : ✉ : mohamed.aqalmoun@usmba.ac.ma

## Un contre exemple

Donner un exemple d'espace vectoriel  $E$  et de deux sous espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  de sorte que  $F \cup G$  ne soit pas un sous espace vectoriel de  $E$ .

### Exercice 1

Résoudre, en indiquant les opérations élémentaires utilisées, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

### Exercice 2

Soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $A^2$  en fonction de  $A$ .
2. La matrice  $A$  est-elle inversible ? Justifier.
3. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n$  en fonction de  $n$  et  $A$ .

### Exercice 3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$  et  $\text{Im } f^{k+1} \subseteq \text{Im } f^k$ .
2. Montrer que  $\text{rg } f^{k+1} \leq \text{rg } f^k$ .  
On suppose pour la suite que  $\ker f^2 = \ker f^3$ .
3. Montrer que  $\text{Im } f^2 = \text{Im } f^3$ .
4. Montrer que  $\ker f^3 = \ker f^4$ .
5. Montrer que la somme  $\ker f^2 + \text{Im } f^2$  est directe.
6. En déduire que  $\ker f^2 \oplus \text{Im } f^2 = E$ .