Examen (Algèbre 3)

E f

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Corrigé

Un contre exemple

Un contre exemple : $E = \mathbb{K}^2$, $F = \{(x,0) \in \mathbb{K}^2 \ \ / \ x \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}((1,0))$ et $G = \{(0,y) \in \mathbb{K}^2 \ \ / \ y \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}((0,1))$. Clairement F et G sont des sous espaces vectoriels de E mais $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoiel de E, car $(1,0),(0,1) \in F \cup G$ et $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin F \cup G$.

Exercice 1

Résolution du système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 2 \\ 2x+y+z & = & 3 \\ x+y+3z & = & 1 \end{array}\right.$ En effectuant les deux opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 2 \\ -y-3z & = & -1 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$, par suite $x=0,\ y=4$ et $z=-1$. D 'où

$$S = \{(0,4,-1)\}$$

Exercice 2

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

2. La matrice A n'est pas inversible. En effet si A est inversible alors $A^{-1}A = 3A^{-1}A$, on obtient donc $A = 3I_3$ ce qui est une contradiction.

3. Remarquons d'abord que $A^2 = 3A$ et $A^3 = 3^2A$....
Montrons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $A^n = 3^{n-1}A$. La propriété est vérifiée pour $n = 1$ ($A^1 = A = 3^0A$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $A^n = 3^{n-1}A$. On a $A^{n+1} = A^nA = 3^{n-1}AA = 3^{n-1}A^2 = 3^{n-1}3A = 3^nA$. D 'où le résultat.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et f un endomorphisme de E.

1. Soit $x \in \ker f^k$, donc $f^k(x) = 0$, par suite $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$, ainsi $x \in \ker f^{k+1}$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f^{k+1}$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Clairement $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in \operatorname{Im} f^k$.

2. D'après le résultat de la question précédente, on a $\operatorname{Im} f^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} f^k$, donc $\dim \operatorname{Im} f^{k+1} \leq \dim \operatorname{Im} f^k$, ainsi $\operatorname{rg} f^{k+1} \leq \operatorname{rg} f^k$.
On suppose pour la suite que $\ker f^2 = \ker f^3$.

3. D'après la formule du rang et le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{array}{rcl} \dim \operatorname{Im} f^2 & = & \operatorname{rg} f^2 = \dim E - \dim \ker f^2 = \dim E - \dim \ker f^3 \\ & = & \operatorname{rg} f^3 = \dim f^3 \end{array}$$

Les deux sous espaces vectoriels $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Im} f^3$ ont même dimension et $\operatorname{Im} f^3 \subseteq \operatorname{Im} f^2$, on en déduit alors que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f^3$.

4. On a $\ker f^3 \subseteq \ker f^4$. Soit maintenant $x \in \ker f^4$, donc $f^3(f(x)) = f^4(x) = 0$, par suite $f(x) \in \ker f^3 = \ker f^2$, il vient alors que $f^3(x) = f^2(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker f^3$. D'où $\ker f^3 = \ker f^4$.

5. Soit $y \in \ker f^2 \cap \operatorname{Im} f^2$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$, on a aussi $0 = f(y) = f^2(f^2(x)) = f^4(x)$, donc $x \in \ker f^4 = \ker f^3 = \ker f^2$, d'où $y = f^2(x) = 0$.

6. D'après la formule du rang appliquée à f^2, on a $\dim E = \dim \ker f^2 + \operatorname{rg} f^2 = \dim \ker f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2$, comme la somme $\ker f^2 + \operatorname{Im} f^2$ est directe, on a donc $\ker f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2 = E$.