Compléments d'algèbre linéaire et dualité

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G \neq \{0\}$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E. On pose $D = \{(x,x) \in F \times G / x \in F \cap G\}$.

1. Vérifie que D est un sous espace vectoriel de $F \times G$ et que $\dim D = \dim F \cap G$.
2. Montrer que $(F \times G)/D$ et $F + G$ sont isomorphes.
3. En déduire la formule de Grassmann.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $((X-a)^i)_{0 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Donner les composantes de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 4

Soit E en espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 5

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = -f$.
Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension n ,et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2. On pose $H = \{g \in \mathscr{L}(E)\ ,\ \ gf = fg\}$
   - 2.1 Montrer que H est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$
   - 2.2 Montrer que $\dim H = n$. Ind: Montrer que $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de H

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme non nul de E.

1. Quelles sont les valeurs possibles du rang de f?
2. On suppose dans cette question que $f^2 = 0$, déterminer le rang de f.
3. On suppose dans cette question que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer le rang de f.

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$\ker f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } \dim E = 2rg(f)$$

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$

1. Montrer que $\ker f \cap \ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$, $\ker f \neq \{0\}$ et $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$
2. Soit x un élément non nul de $\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre.
3. Montrer que $\dim(\ker(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 2$ et $\dim(\ker f) = 1$.

4. Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit un espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de E (i.e $p^2 = p$).

1. Vérifier que $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$.
2. Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme $\operatorname{Im} p \oplus \ker p$.
3. En déduire que $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E de rang 1 et A la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ de E.

1. Quelle est la dimension de $\ker f$?
2. Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
3. En déduire que $f^2 = \operatorname{tr}(f) f$.

Exercice 12

On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

   Pour chacune de ces valeurs déterminer un vecteur X tel que $AX = \lambda X$ et dont la deuxième composante vaut 1.
3. On pose $e_1 = (3,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$.
   Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice B de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
5. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3), exprimer une relation entre A,B et P.
6. Calculer B^n, puis A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence n, c'est-à-dire $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. On note f l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

1. Montrer qu'il existe un vecteur non nul $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(f^{-1}(e), \dots, f(e), e)$ forme une base de E.
3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $\ker u = \operatorname{Im} u$.

1. Montrer que n est pair.
2. Soit $p = \dim \ker u$. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une base de $\ker u$.

2.1 Montrer que pour tout $1 \leq i \leq p$, il existe $e_i \in E$ tel que $v_i = u(e_i)$.

2.2 Montrer que $(v_1, \ldots, v_p, e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.

3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 15

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ c'est-à-dire , il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

1. Montrer qu'il existe deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P = M + iN$.

2. Montrer que $AM = MB$ et $AN = NB$.
On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \det(M + zN)$, et on *admet que f est un polynôme en z.*

3. Vérifier que f est non nulle. Ind: calculer $f(i)$...

4. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) \neq 0$.

5. Déduire de ce qui précède que les deux matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

2.1 Montrer que $M = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$

2.2 En déduire que $\det M = \det A \det C$.

Exercice 17

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice invesible, $u, v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux vecteurs colonnes et $b \in \mathbb{K}$.

1. Déterminer $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. Exprimer le déterminant $\begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix}$ en fonction du déterminant de B.

3. Montrer que $\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b\det(B) - {}^t u {}^t \tilde{B} v$ où $\tilde{B}$ est la comatrice de B.

Exercice 18

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note $O_r(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R} \ / \ {}^t AA = I_r\}$.
Si n, p et q sont des entiers tels que $n = p + q$, on désigne par $I_{p,q}$ la matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $O_{p,q} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^t M I_{p,q} M = I_{p,q}\}$, on note aussi $K_{p,q} = O_{p,q} \cap O_n(\mathbb{R})$.
Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une bijection entre $K_{p,q}$ et $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$.

1. Soit $(A, B) \in O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$, et M la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in K_{p,q}$.

2. Soit $M \in K_{p,q}$.

2.1 Justifier que M est inversible et que $M^{-1} = {}^t M$.

2.2 Vérifier que les deux matrices M et $I_{p,q}$ commutent.

On note M sous forme de blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in$

$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

2.3 En effectuant des produits par blocs, montrer que $B = 0$ et $C = 0$.

2.4 Montrer que $A \in O_p(\mathbb{R})$ et $D \in O_q(\mathbb{R})$.

3. Conclure.

Exercice 19

Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 20

Montrer que $\{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P'(0) + P(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 21

Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 22 (Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application φ_A définie par $\varphi_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ji}b_{ij}$ où a_{ij} (resp. b_{ij}) est le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A (resp. B).

3. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\varphi = \varphi_A$ i.e pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

Exercice 23

Soit E un espace vectoriel de dimension n, H et H' deux hyperplans de E distincts $(H \neq H')$.

1. Montrer que $\dim(H \cap H') = n - 1$ ou $n - 2$.

2. En déduire $\dim(H \cap H')$.

3. Montrer qu'il existe $(e, e') \in H \times H'$ tel que $e \notin H'$ et $e' \notin H$.

4. On pose $D = \mathrm{Vect}(e + e')$.

4.1 Justifier que D est une droite vectoriel.

4.2 Montrer que $E = H \oplus D = H' \oplus D$.

Exercice 24

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et F un sous espace vectoriel de dimension d. On fixe une base $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, d_d)$ de F.

1. Montrer qu'on peut compléter $\mathcal{B}_F$ en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$ de E.
   Notons $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_d^*, e_{d+1}^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $F = \bigcap\limits_{k=d+1}^{n} \ker e_k^*$.

3. En déduire que F est l'intersection de $n - d$ hyperplans.

4. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-d}$, $n - d$ formes linéaires, linéairement indépendantes. Montrer que $\bigcap\limits_{k=1}^{n-d} \ker \varphi_k$ est un sous espace vectoriel de E de dimension d.

Exercice 25

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts. Notons $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ les formes linéaires définies sur $\mathbb{K}_n[X]$ par : $\varphi_k(P) = P(x_k)$.

1. Démontrer que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$.

2. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$