Éléments propres et polynômes d'endomorphismes

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et u l'endomrphisme canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que le sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(2,2,2)$ est stable par u.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphsime de E. on suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(u(x), x)$ est liée.

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in E \setminus \{0\}$, $\lambda_x = \lambda_y$.
3. En déduire que u est une homothétie.
4. Déterminer les endomorphismes de E laissant stable tous les sous espaces vectoriels de E.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de u et $P(0) \neq 0$, alors u est un isomorphisme.
2. Montrer que u est un isomorphisme si, et seulement si, $\pi_u(0) \neq 0$.
3. Dans cette question E est de dimension finie. Montrer que u est un isomorphisme si, et seulement si, $\chi_u(0) \neq 0$.

Exercice 4

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^3 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $E = \ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = -u$. Montrer que $E = \ker u \oplus \ker(u^2 + \mathrm{Id}_E)$. En déduire que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $v \in \mathscr{L}(E)$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi(u) = vu$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, démontrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $P(\varphi)(u) = P(v)u$.
2. Montrer que $\pi_v = \pi_\varphi$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\deg \pi_u = 1$ si, et seulement si, u est une homothétie.
2. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Calculer $(A - I_3)^2$, puis déterminer π_u.

Exercice 8

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1, et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Quelle est la dimension du $\ker u$?
2. En considérons une base adaptée au $\ker u$, montrer que $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(A))$.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On note d le degré de π_u.

1. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^d)$ est liée.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est libre.
3. Réciproquement, montrer que si $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^l)$ soit liée et $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{l-1})$ soit libre, alors $l = \deg \pi_u$.

Exercice 10

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $u^2 = 3u$.
2. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker(u - 3\,\mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que $\pi_u = X(X-3)$.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P'$.

1. Montrer que u est nilpotent.
2. Déterminer π_u.

Exercice 12

Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice A:

1. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_A et π_A. Donner le spectre de A.
2. Déterminer les sous espaces propres de A.
3. Déterminer les sous espaces caractéristique de A.

Exercice 14

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_u, le polynôme caractéristique de u.
2. Déterminer $\mathrm{Sp}(u)$.
3. Déterminer les sous espaces propres de u.
4. Donner une base de E formée de vecteurs propres de u, et écrire la matrice de u dans cette base.
5. Calculer $u(u - \mathrm{Id}_E)(u - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E de rang 1.

1. En écrivant la matrice de u dans une base bien choisie, montrer que le polynôme caractéristique de f est de la forme
$$\chi_u = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - a)$$
Où $a = \mathrm{tr}(u)$. Quelles sont les valeurs propres de u?
2. Montrer que si $\mathrm{tr}(u) = 0$, alors u n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que si $\mathrm{tr}(u) \neq 0$, alors u est diagonalisable.

Exercice 16 (matrice compagnon)

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, et P le polynôme de degré n donné par
$$P = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0$$
On note C_P la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de C_P est $(-1)^n P$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient u un endomorphisme de E et e un vecteur tel que la famille $(e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e))$ est libre. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a la même forme que C_P.
3. Quelle le spectre de C_P?
4. Montrer que $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}({}^tC_P)$.
5. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}({}^tC_P)$. Montrer que $\dim(E_\lambda({}^tC_P)) = 1$.

Exercice 17

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est inversible alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. On considérant la matrice $A - \lambda I_n$, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 18

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :
$$uv - vu = u$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n v - vu^n = nu^n$.
2. Soit P un polynôme annulateur de u, montrer que XP' est annulateur de u.
3. Montrer que si P est un polynôme tel que P divise XP', alors P est de la forme $P = aX^k$ où $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que u est nilpotent.

Exercice 19

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est inversible alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} XI_n - BA & B \\ 0 & XI_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} XI_n & B \\ 0 & XI_n - AB \end{pmatrix}$.
En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.