Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer D^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $ab > 0$.
3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $ab \neq 0$.

Exercice 3

Soit A la matrice d'ordre $n \geq 2$, dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer le rang de A.
2. Calculer A^2 en fonction de A.
3. Justifier que A est diagonalisable.
4. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé c'est-à-dire $\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$.

1. Montrer que $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k^{m_k}$.
2. Montrer que $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{r} m_k \lambda_k$

Exercice 5

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Calculer A^n.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, u, v deux endomorphsimes de E tels que u et v commutent et v nilpotent.

1. Montrer que $\det(\mathrm{Id}_E + v) = 1$.
2. Montrer que u est inversible si, et seulement si, $u + v$ est inversible.
3. Montrer que $\det(u + v) = \det u$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n et v un endomoephisme de E. Soit T l'application définie sur $\mathscr{L}(E)$ par $T(u) = uv - vu$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
   Soit G (respectivement D) l'application définie sur $\mathscr{L}(E)$ par $G(u) = uv$ (respectivement $D(u) = vu$)
2. Montrer que si v est nilpotent, alors G et D sont nilpotents.
3. Montrer que si v est nilpotent, alors T est nilpotent.
4. Montrer que si v est diagonalisable, alors T l'est aussi.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \ / uv = vu\}$.

1. Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est une sous algèbre de $\mathscr{L}(E)$.
2. On suppose que u est diagonalisable. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $v \in \mathscr{C}(u)$ si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Exercice 9

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $A^n = 0$.

Exercice 10

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 11

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^2 est une valeur propre de A.
2. Montrer que si λ^2 est une valeur propre de A alors λ est une valeur propre de B.
3. Montrer que B $= \{\pm\sqrt{\alpha} / \alpha \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^+\}$.
4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$. Montrer que $\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A)$.
5. Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$u(A) = A - {}^tA$$

1. Calculer u^2 en fonction de u.
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Déterminer la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ (sous espace vectoriel des matrices symétriques) et celui de $A_n(\mathbb{R})$ (sous espace vectoriel des matrices anti-symétriques).
4. En déduire $\mathrm{tr}\, u$ et $\det u$.

Exercice 13

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Sans calculer χ_A déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 14

On considère les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par: $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - w_n \\ w_{n+1} &= 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Exprimer X_n en fonction de A, n et X_0.
3. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
4. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n

Exercice 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$.

1. Justifier l'existence d'une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice inversible telles que $A = PTP^{-1}$.
2. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ et notons $t_1, \dots, t_n$ les éléments diagonaux de T.
   - 2.1 Montrer que que $Q(T)$ est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont $Q(t_1), \dots, Q(t_n)$.
   - 2.2 En déduire que $\mathrm{Sp}(Q(A)) = \{Q(\lambda) \ / \ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Exercice 16

On considère la matrice A suivante: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$.
4. Calculer la solution du système différentielle $X' = AX$, $X(0) = {}^t(1, 0, -1)$.

Exercice 17

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres, puis une base de vecteurs propres.
3. Résoudre le système différentielle : $\begin{cases} x' &= x + 2z \\ y' &= y \\ y' &= 2x + z \end{cases}$, où x, y et z désignes trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 (Théorème de Hadamard)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $1 \leq \forall i \leq n$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, alors A est inversible.
2. En déduire que le spectre de A est inclus dans $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_f(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_i j|)$. (où $B_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - a| \leq r\}$).

Exercice 19

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la trigonaliser.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la trigonaliser.