# Contrôle (Algèbre 4)

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$u$ $A$ LPEM

## Notations

Soit $E$ un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

☞ On désigne par $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ polynôme en $u$ c'est-à-dire $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \ / P \in \mathbb{K}[X]\}$.

☞ On désinge par $\mathscr{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec $u$ c'est-à-dire $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \ / uv = vu\}$.

✍

## Questions de cours

1. Donner la défintion du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
2. Donner la défintion d'un sous espace stable par un endomorphisme.
3. Donner la défintion d'un endomorphisme diagonalisable.

✍

**Exercice 1** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $p$ un projecteur de $E$ i.e $p^2 = p$.

1. Vérifier que $E = \ker(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker p$.
2. Montrer que $\ker(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}\, p = \mathrm{tr}\, p$.
   Indication : considérer une base adaptée à la somme $E = \ker(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker p$.

**Exercice 2** Soit $A$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$. en déduire le spectre de $A$.
2. Déterminer les sous espaces propres de $A$.

# PROBLÈME

Dans tout le problème $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$.

## Première partie :
## Généralités

1. Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est une sous algèbre de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est une sous algèbre de $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que $\mathbb{K}[u] \subseteq \mathscr{C}(u)$.
4. Montrer que $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \ / \ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$.
   Indication : effectuer la division euclidienne par $\chi_u$, et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

## Deuxième partie :
## Cas où $u$ admet $n$ valeurs propres distinctes

On suppose dans cette partie que $u$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Pour $1 \leq i \leq n$, notons $e_i$ un vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda_i$.

5. Montrer que $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$.
6. Soit $1 \leq i \leq n$. Montrer que $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}(e_i)$.
7. Déterminer la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$.
   Dans la suite de cette partie $v$ désigne un élément de $\mathscr{C}(u)$.
8. Montrer que $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$.
9. En déduire que pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_i) = \alpha_i e_i$.
10. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose
$$L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(X - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k)}$$
    - 10.1 Soit $1 \leq i \leq n$. Vérifier que $L_i(\lambda_i) = 1$
    - 10.2 Soit $1 \leq i, j \leq n$, avec $i \neq j$. Montrer que $L_i(\lambda_j) = 0$.
    - 10.3 Soit $L$ le polynôme défini par $L = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k$. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, $L(\lambda_i) = \alpha_i$.
11. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, $L(u)(e_i) = \alpha_i e_i$.
12. Montrer que $v = L(u)$.
13. En déduire que $\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

حظ سعيد للجميع

**Bonne chance**

**END**