# Contrôle Blanc

$u$ Racines carrées de matrices réelles $A$

LPEM

## Définition

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de $A$ si $B^2 = A$. On note $\mathrm{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de $A$ c'est-à-dire

$$\mathrm{Rac}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \ B^2 = A\}$$

# PROBLÈME

### Première partie :
### Cas où $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes

On suppose dans cette partie que la matrice $A \in \mathcal{M}_n($ possède $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Soit $u$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A$.

1. Quel est le spectre de $u$ ?
2. Pour $1 \leq i \leq n$, soit $e_i$ un vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda_i$.
   - 2.1 Justifier que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$.
   - 2.2 Déterminer $D$ la matrice de $u$ dans la base $\mathscr{B}$.
   - 2.3 En déduire qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $B$ est une racine carrée de $A$ si, et seulement si, la matrice $P^{-1}BP$ est une racine carrée de $D$.
4. Racines de $D$ : Soit $S$ une racine carrée de $D$.
   - 4.1 Montrer que $SD = DS$, et en déduire que la matrice $S$ est diagonale.
   - 4.2 On note alors $S = \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Que vaut $s_i^2$ ?
   - 4.3 Que peut-on dire de $\mathrm{Rac}(A)$ si $A$ admet une valeur propre strictement négative ?

   On suppose dans la suite de cette partie que les valeurs propres de $A$ sont positives.
5. Déterminer toutes les racines de $D$.
6. Écrire toutes les racines de $A$ à l'aide de la matrice $P$.

### Deuxième partie :
### Cas où $A$ est la matrice nulle

Dans cette partie on cherche à déterminer les racines de la matrice nulle. Soit $B$ une racine carrée de la matrice nulle, et $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $B$. On note $r$ le rang de $v$.

7. Montrer que $\operatorname{Im} v \subseteq \ker v$.

8. En déduire que $r \leq \frac{n}{2}$.

9. On suppose que $v$ est non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} v$, que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ de $\ker v$.

    9.1 Vérifier que pour chaque $1 \leq i \leq r$, il existe $e'_i \in E$ tel que $e_i = v(e'_i)$.

    9.2 Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e'_1, \dots, e'_r)$ est une base de $E$.

    9.3 Écrire la matrice de $v$ dans la base $\mathscr{B}$. On notera $V$ cette matrice.

10. Déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

## Troisième partie :
## Cas de la matrice $I_n$

Soit $B$ une racine carrée de $I_n$.

11. Montrer que $B$ est inversible.

12. Montrer que $B$ est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

13. Déterminer $\operatorname{Rac}(I_n)$.