Corrigé

Contrôle Blanc

u Racines carrées de matrices réelles A

LPEM

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $B^2 = A$. On note $\mathrm{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A c'est-à-dire

$$\mathrm{Rac}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \ B^2 = A\}$$

PROBLÈME

Première partie :
Cas où A admet n valeurs propres distinctes

On suppose dans cette partie que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

1. L'endomorphisme u et la matrice A ont mêmes valeurs propres, donc $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

2. Pour $1 \leq i \leq n$, soit e_i un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i.

   2.1 Les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, il s'agit donc d'une famille libre. Le nombre d'éléments de cette famille est la dimension de E, donc c'est une base de E.

   2.2 Puisque , pour $1 \leq i \leq n$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, la matrice D est alors diagonale, plus précisément, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ c'est-à-dire

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   2.3 Puisque A est la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de E et D la matrice u dans la base $\mathcal{B}$, il vient que A et D sont semblables, et plus précisément, si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, alors P est invesible et on a $A = PDP^{-1}$.

3. B est une racine carrée de $A \Leftrightarrow B^2 = A \Leftrightarrow B^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}B^2P = A \Leftrightarrow \left(P^{-1}BP\right)^2 = D \Leftrightarrow$ la matrice $P^{-1}AP$ est une racine carrée de D.
   Notons que : $\left(P^{-1}BP\right)^2 = P^{-1}BP.P^{-1}BP = P^{-1}B^2P$

4. Racines de D : Soit S une racine carrée de D.

4.1 On a S racine carrée de D, donc $S^2 = D$. D'où $SD = SS^2 = S^3 = S^2S = DS$.
Notons s_{ij} le coefficient d'indice ij de la matrice S. On

$$SD = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_{11} & \lambda_2 s_{12} & \dots & \lambda_n s_{1n} \\ \lambda_1 s_{21} & \lambda_2 s_{22} & \dots & \lambda_n s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 s_{n1} & \dots & \dots & \lambda_n s_{nn} \end{pmatrix}$$

Le terme d'indice ij de la matrice SD est $\lambda_j s_{ij}$.
On a aussi

$$DS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_{11} & \lambda_1 s_{12} & \dots & \lambda_1 s_{1n} \\ \lambda_2 s_{21} & \lambda_2 s_{22} & \dots & \lambda_2 s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n s_{n1} & \dots & \dots & \lambda_n s_{nn} \end{pmatrix}$$

Le terme d'indice ij de la matrice DS est $\lambda_i s_{ij}$.
Comme $SD = DS$, on a alors pour tout i, j, $\lambda_j s_{ij} = \lambda_i s_{ij}$. En particulier pour $i \neq j$, on obtient $(\lambda_j - \lambda_i)s_{ij}$. Or $\lambda_i \neq \lambda_j$ (pour $i \neq j$), il vient que $s_{ij} = 0$. On en déduite que $s_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, cela signifie que la matrice D est diagonale.

4.2 On a $S^2 = D$, donc $\operatorname{diag}(s_1^2, \dots, s_n^2) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, il en résulta que $s_i^2 = \lambda_i$.

4.3 Si A possède une valeur propres λ_{i_0} strictement négative, alors l'équation $s_{i_0}^2 = \lambda_{i_0}$ n'a pas de solution, ainsi $\operatorname{Rac}(D)$ est vide, par suite $\operatorname{Rac}(A) = \emptyset$.

On suppose dans la suite de cette partie que les valeurs propres de A sont positives.

5. D'après le résultat de la question 4.1 toute racine carrée de D est diagonale. Ainsi $S = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)$ est une racine de D si, et seulement si, $1 \le i \le n$, $s_i^2 = \lambda_i$ si, et seulement si, $1 \le i \le n$, $s_i \in \{-\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_i}\}$. Il en résulte que

$$\operatorname{Rac}(D) = \left\{\operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n) \ \ / \ 1 \le \forall i \le n \ , \ s_i \in \{-\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_i}\}\right\}$$

6. B est une racine carrée de $A \Leftrightarrow P^{-1}BP$ est une racine carrée de $D \Leftrightarrow P^{-1}BP = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)$ où $s_i \in \{-\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_i}\}$. D'où

$$\operatorname{Rac}(A) = \left\{P\operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n)P^{-1} \ \ / \ 1 \le \forall i \le n \ , \ s_i \in \{-\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_i}\}\right\}$$

Deuxième partie :
Cas où A est la matrice nulle

Dans cette partie on cherche à déterminer les racines de la matrice nulle. Soit B une racine carrée de la matrice nulle, et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. On note r le rang de v.

7. On a $B^2 = 0$, donc $v^2 = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} v$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$, puis $v(y) = v(v(x)) = v^2(x) = 0$, il en résulte que $y \in \ker v$.

8. De $\operatorname{Im} v \subseteq \ker v$, il vient que $\dim \operatorname{Im} v \le \dim \ker v$. Par la formule du rang, $2 \operatorname{Im} v \le \dim \ker v + \dim \operatorname{Im} v = n$, et donc $r = \dim \operatorname{Im} v \le \frac{n}{2}$.

9. On suppose que v est non nul, donc $r \ge 1$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} v$, que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ de $\ker v$.

10. Si $1 \le i \le r$, alors $e_i \in \operatorname{Im} v$, il existe alors $e'_i \in E$ tel que $e_i = v(e'_i)$.

11. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r},\lambda'_1,\ldots,\lambda'_r \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_{n-r}e_{n-r}+\lambda'_1 e'_1+\ldots+\lambda'_r e'_r=0$. Comme $e_i \in \ker v$ pour $1\le i\le n-r$, en appliquant v, on obtient $\lambda'_1 v(e'_1)+\ldots+\lambda'_r v(e'_r)=0$, c'est-à-dire $\lambda'_1 e_1+\ldots+\lambda'_r ve_r=0$. Or la famille $(e_1,\ldots,e_r)$ est libre, il vient que $\lambda'_1=\ldots=\lambda'_r=0$. Il en résulte alors que $\lambda_1 e_1+\ldots,\lambda_{n-r}e_{n-r}=0$, en tenant compte la liberté de la famille $(e_1,\ldots,e_{n-r})$, on obtient $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-r}=0$. Puisque $\operatorname{card}(\mathscr{B})=n=\dim E$, $\mathscr{B}$ est donc une base de E.

12. Pour $1\le i\le n-r$, on a $v(e_i)=0$ et pour $1\le i\le r$, $v(e'_i)=e_i$, donc la matrice v dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$V=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v)=\begin{pmatrix}0 & I_r\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice identité d'ordre r.

13. Soit B une racine carré de 0.
Si $\operatorname{rg} B=0$, alors $B=0$.
Si $\operatorname{rg} B=r\ge 1$: notons v l'endomorphisme canoniquement associé à B, d'après la question précédente, il existe un base de E dans laquelle la matrice de v est de la forme $\begin{pmatrix}0 & I_r\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, il existe alors une matrice inversible P telle que $B=P\begin{pmatrix}0 & I_r\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$. Réciproquement une matrice de cette forme est une racine de la matrice nulle, donc

$$\operatorname{Rac}(0)=\{0\}\cup\{P\begin{pmatrix}0 & I_r\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\ /\ r\ge 1\ ,\ P\in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})\}$$

Troisième partie :
Cas de la matrice I_n

Soit B une racine carrée de I_n.

14. Vu que $B^2=I_n$, B est inversible et $B^{-1}=B$.

15. Soit v l'edomorphisme de $E=\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice B. On a $v^2=\mathrm{Id}_E$ (v est une symétrie de E). Donc $X^2-1=(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de v. il vient par le théorème de Cayley-hamilton que $E=\ker(v-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(v+\mathrm{Id}_E)$. Soit $\mathscr{B}_1=(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $\ker(v-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathscr{B}_2=(\varepsilon_1,\ldots,e_q)$ une base de $\ker(v+\mathrm{Id}_E)$ (en particulier $p+q=n$). Alors $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$ est une base de E. La matrice de v dans cette base (par blocs) est

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v)=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}$$

On en déduit que B est semblable à cette (dernière) matrice, il existe alors une matrice inversible P telle que $B=P\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}P^{-1}$.

16. Si B est une racine carrée de I_n, il existe $p,q\in\mathbb{N}$ avec $p+q=n$ et une matrice inversible P tels que $B=P\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}P^{-1}$. Réciproquement une matrice de cette forme est une racine carrée de I_n. Donc

$$\operatorname{Rac}(I_n)=\{P\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}P^{-1}/\ p+q=n\ ,\ P\in\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})\}$$

Ici on convient que pour $p=0$, $\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}=-I_n$ et pour $q=0$, $\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}=I_n$.